SEBHA UNIVERSITY CONFERENCE PROCEEDINGS, VOL.03 NO. 2 2024
DOI: 10.51984/SUCP.V3I2.3438

وقائع مؤتمرات جامعة سبها
Sebha University Conference Proceedings

Confrence Proceeeding homepage: http://www.sebhau.edu.ly/journal/CAS

استخدام طريقة المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من الرتبة n مع شروط ابتدائية وحدية

*هند القاضي [1] و أمبارك الشاط [2]

[1]قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة سبها، ليبيا
[2]قسم الرياضيات، كلية الآداب والعلوم أوباري، جامعة سبها، ليبيا

الملخص

تناولت هذه الورقة طريقة تحليلية لحل المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية الضبابية مع شروط ابتدائية وحدية ضبابية. شملت الدراسة ثلاث حالات مختلفة بناءً على إشارات معاملات المعادلات التفاضلية الضبابية. اعتمدت الطريقة على تحويل المعادلة التفاضلية الضبابية إلى معادلة تفاضلية عادية باستخدام تقنية المركز الضبابي. (FCM) تم حل المعادلة التفاضلية العادية بإحدى الطرق القياسية، وأخيرًا تم إعادة كتابة الحل باستخدام دالة الانتماء الضبابية μ(x) للحصول على حل المعادلة التفاضلية الخطية الضبابية. تم توضيح الطريقة من خلال أمثلة تطبيقية.

الكلمات المفتاحية:

العدد الضبابي
المعادلات التفاضلية الضبابية
طريقة المركز الضبابي
مشتقة هوكوهارا
مسألة القيمة الحدية الضبابية

Using the Fuzzy Centre Method to Solve Nth-order Linear Fuzzy Differential Equations with boundary and Initial Conditions

* H. M. Egadi[1], A. A. Ashat[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Sabha, Libya
[2]Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences Ubari, University of Sabha, Libya

Keywords:

Fuzzy Number
Fuzzy Differential Equation
Fuzzy Centre -Based Methods
Fuzzy Boundary Value Problem
Hukuhara Derivative

ABSTRACT

This paper presents an analytical method for solving fuzzy linear differential equations with fuzzy initial conditions. The study investigates three distinct cases based on the signs of the coefficients in the fuzzy differential equations. The proposed method relies on transforming the fuzzy differential equation into an ordinary differential equation using the Fuzzy Centre Method (FCM). Subsequently, the ordinary differential equation is solved using a standard method. Finally, the solution is rewritten using the fuzzy membership function μ(x) to obtain the solution of the fuzzy linear differential equation. The method is illustrated through illustrative examples.

1. المقدمة

ظهرت فكرة المعادلات التفاضلية الضبابية لأول مرة في أواخر القرن العشرين، كرد فعل على الحاجة إلى أدوات رياضية أكثر قدرة على نمذجة الأنظمة المعقدة التي تتضمن عدم اليقين والغموض. في عام 1965، قدم العالم الإيراني لطف الله زاده مفهوم نظرية المجموعات الضبابية[1, 2]، والتي وفرت إطارًا رياضيًا لتمثيل عدم اليقين بشكل منهجي. سمح هذا الإنجاز للعلماء بتوسيع نطاق المعادلات التفاضلية لتشمل الأنظمة التي لا يمكن وصفها بدقة باستخدام الأعداد الدقيقة. وبدأت أبحاث المعادلات التفاضلية الضبابية تتطور بشكل سريع في العقود التالية، ففي عام 1975 قدم العالم الأمريكي إي. ج. كوك أول تعريف رسمي للمعادلات التفاضلية الضبابية، ونشر بعد ذلك العديد من العلماء مساهمات هامة في هذا المجال، مثل د. ديد، س. يانج، هـ. ل. فانغ، ك. تشونغ، وع. ر. ديماتشيلو[2]. قدم كلا من غازيلايف ، شاهين عمران امرهوف ، جولاي اوغلو فاطمى الله طريقة جديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية مع معاملات حقيقية واضحة وحلة أولية عبر عنها بمتجة من الاعداد الضبابية [3]، وكذلك قدم كلا من باكلي و فوربنغ طريقتين تحليليتين لحل معادلة خطية من الرتبة n وكانت الطريقة الأولى تحويل الحل الى ضبابي ثم التحقق اذا كان الحل يحقق بالمعادلة مع الشروط الابتدائية الضبابية والطريقة الثانية هي عكس الطريقة الأولى حيث قاموا بحل مسألة القيمة الابتدائية الضبابية ثم التحقق إذا كانت تعرف دالة ضبابية [4], قام كلا توفيق الله وبردانلو عزيز أحمدي، نبرد باجلان أحمدي بتقديم طريقة تحليلية لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة n مع

*Corresponding author:
E-mail addresses: Hen.elgadi@sebhau.edu.ly,(A. A. Ashat) Amb.ashat@sebhau.edu.ly
Article History: Received 29 June 2024 - Received in revised form 24 August 2024 - Accepted 06 October 2024

شروط ابتدائية ضبابية [5] كما قامت رشا إبراهيم باستخدام طريقة التحول التفاضلي لحل المعادلات الضبابية الخطية والغير خطية للحصول على الحل التقريبي باستخدام خصائص نظرية المجموعات [6]،حيث تعد المعادلات التفاضلية الضبابية مجالاً نشطاً مع استمرار تطوير أساليب حل جديدة وتحسينات وتزداد أهمية هذه المعادلات في نمذجة وفهم الأنظمة .

سيتم تقسيم الورقة على النحو التالي: في القسم الثاني يتم تقديم بعض المفاهيم الأساسية التي سيتم استخدامها في الورقة، في القسم الثالث يتم تقديم طريقة المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n ، ثم يتم توضيح الطريقة من خلال حل العديد من الأمثلة في القسم الرابع، ويتم استخلاص النتائج ومناقشتها في القسم الخامس.

2. مفاهيم اساسية

تعريف1: الفترة Interval [7]

الفترة $\tilde{x}$ المعرفة ب $[\underline{x},\bar{x}]$ على مجموعة الأعداد الحقيقية تعطى ب

$$\tilde{x}=[\underline{x},\bar{x}]=\{x\in R:\underline{x}\le x\le \bar{x}\} \quad (1)$$

سنتناول فقط الفترة المغلقة في هذا البحث.

لتكن لدينا فترتين $\tilde{x}=[\underline{x},\bar{x}]$ ، $\tilde{y}=[\underline{y},\bar{y}]$ يقال بأن هاتين الفترتين متساويتين إذا كانت في نفس المجموعة، من الناحية الرياضية هذا يحدث فقط عندما تكون نقاط النهاية متساوية، وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\tilde{x}=\tilde{y}\Leftrightarrow \underline{x}=\underline{y}\,,\bar{x}=\bar{y} \quad (2)$$

بالنسبة للفترتين $\tilde{x}=[\underline{x},\bar{x}]$ ، $\tilde{y}=[\underline{y},\bar{y}]$ يتم تعريف العمليات الحسابية على الفترات مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة كالتالي:

$$\tilde{x}+\tilde{y}=[\underline{x}+\underline{y},\bar{x}+\bar{y}] \quad (3)$$

$$\tilde{x}-\tilde{y}=[\underline{x}-\underline{y},\bar{x}-\bar{y}] \quad (4)$$

$$\tilde{x}\times\tilde{y}=[\min S\,،\,\max S]\,,\text{where } S=\{\underline{x}\times\underline{y}\,,\underline{x}\times\bar{y},\bar{x}\times\underline{y},\bar{x}\times\bar{y}\}, \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}=[\underline{x},\bar{x}]\times\left[\frac{1}{\bar{y}},\frac{1}{\underline{y}}\right]\ \text{if}\ \ 0\notin\bar{y} \quad (6)$$

الآن إذا كان K عدداً حقيقياً و $\tilde{x}=[\underline{x},\bar{x}]$ فإن حاصل ضربهما يعطى ب

$$k\tilde{x}=\begin{cases}[k\bar{x},k\underline{x}], & K<0\\ [k\underline{x},k\bar{x}], & K\ge 0\end{cases} \quad (7)$$

تعريف2: العدد الضبابي Fuzzy Number [6]

العدد الضبابي $\widetilde{U}$ يكون مجموعة ضبابية محدبة $\widetilde{U}$ من خط الأعداد الحقيقية R بحيث:

$$\{\mu_{\widetilde{U}}(x):R\to[0,1],\forall x\in R\},$$

بحيث $\mu_{\widetilde{U}}$ تسمى دالة الانتماء للمجموعة الضبابية، وهي مستمرة جزئياً.

وهناك مجموعة متنوعة من الأعداد الضبابية ولكن في هذه الدراسة نستخدم فقط الأعداد الضبابية: المثلثية وشبة المنحرف والجاوسي.

تعريف3: العدد الضبابي المثلثي Triangular Fuzzy Number [8]

العدد الضبابي المثلثي $\widetilde{U}$ (TFN) هو مجموعة ضبابية محدبة $\widetilde{U}$ من خط الأعداد الحقيقية R بحيث:

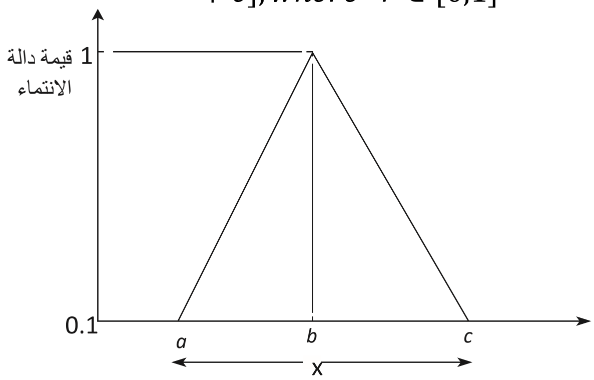
1. يوجد تحديداً عنصراً واحداً $x_0\in R$ مع $\mu_{\widetilde{U}}(x_0)=1$ (x_0 تسمى القيمة المتوسطة من $\widetilde{U}$) حيث $\mu_{\widetilde{U}}$ دالة الانتماء للمجموعة الضبابية.
2. $\mu_{\widetilde{U}}(x)$ متصلة جزئياً.

لنعتبر العدد الضبابي المثلثي (TFN) $\widetilde{U}=(a,b,c)$. دالة الانتماء $\mu_{\widetilde{U}}$ لـ $\widetilde{U}$ تعرف كالتالي :

$$\mu_{\widetilde{U}}(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & x\ge c\end{cases}$$

العدد الضبابي المثلثي (TFN) $\widetilde{U}=(a,b,c)$ يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:

$$r-approach:[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]=[(b-a)r+a,-(c-b)r+c],where\ \ r\in[0,1]$$



شكل 1يبين العدد الضبابي المثلثي

تعريف4: العدد الضبابي شبة المنحرف Trapezoidal Fuzzy Number [8]

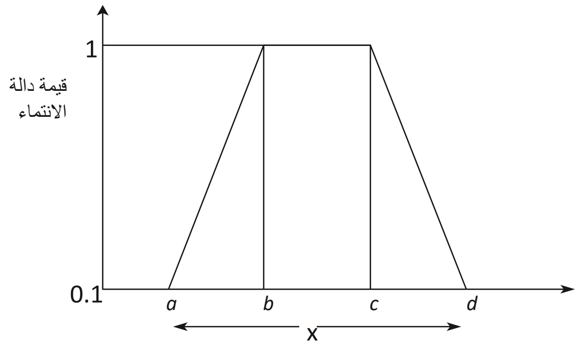
لنعتبر العدد الضبابي شبة المنحرف (TrFN) $\widetilde{U}=(a,b,c,d)$.

دالة الانتماء $\mu_{\widetilde{U}}$ لـ $\widetilde{U}$ تعرف كالتالي :

$$\mu_{\widetilde{U}}(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0, & x\ge d\end{cases}$$

العدد الضبابي شبة المنحرف (TrFN) $\widetilde{U}=(a,b,c,d)$ يمكن تمثيله بأزواج مرتبة من الدوال من خلال:

$$r-cut\ approach:[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]=[(b-a)r+a,-(d-c)r+d],where\ \ r\in[0,1]$$



شكل 2: يبين العدد الضبابي شبة المنحرف

تعريف5: العدد الضبابي الجاوسي Gaussian Fuzzy Number [7]

لنعتبر العدد الضبابي الجاوسي (GFN) $\widetilde{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$.

دالة الانتماء $\mu_{\widetilde{U}}$ لـ $\widetilde{U}$ تعرف كالتالي :

$$\mu_{\widetilde{U}}(x) = \begin{cases} exp[-(x-\delta)^2/2\sigma_l{}^2 & for \quad x \le \delta] \\ exp[-(x-\delta)^2/2\sigma_r{}^2 & for \quad x \ge \delta] \end{cases} \quad \forall x \in R$$

عندما قيمة النموذج تعطى بـ δ و σ_l ، σ_r يشير إلى الطرف الايمن والأيسر الضبابي المقابل لتوزيع جاوس. بالنسبة للعدد الضبابي الجاوسي المتماثل فإن الطرف الأيمن والأيسر متساويان ، أي أن $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$

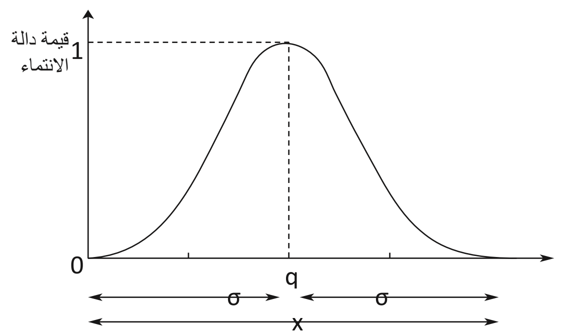
لذلك يمكن كتابة (GFN) *العدد الضبابي الجاوسي المتماثل بالشكل* $\widetilde{U} = (\delta, \sigma_l, \sigma_r)$ ودالة الانتماء المقابلة تعرف كالتالي :

$$\mu_{\widetilde{U}}(x) = exp\{-\beta(x-\delta)^2\} \qquad \forall x \in R$$

عندما $\lambda = 1/2\sigma^2$.

يمكن تمثيل (GFN) المتماثل في الصورة البارا مترية على النحو التالي :

$$\widetilde{U} = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)] = \left[\delta - \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}}, + \sqrt{-\frac{(\log_e r)}{\lambda}}\right], where \quad r \in [0,1]$$



شكل 3: يبين العدد الضبابي الجاوسي

تم عرض التمثيل البياني للأعداد الضبابية المثلثية وشبة المنحرف والجاوسية، الحدود العليا والدنيا تلبي المتطلبات الاتية:

1. $\underline{u}(r)$ هى دالة غير متناقصة ومحدودة من اليسار بـ $[0,1]$.
2. $\overline{u}(r)$ هى دالة غير متزايدة ومحدودة من اليمين بـ $[0,1]$.
3. $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r), 0 \le x \le 1$

تعريف6: درجة الانتماء[9]

تعتبر درجة ودالة الانتماء من أهم العناصر وحجر الزاوية في الرياضيات الضبابية والمكون الجديد الذي أضيف للعناصر والمجموعات التقليدية، والتي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم استقلاليته. يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود انتماء تام لعنصر في مجموعة فقط، بل هناك انتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة. إن درجة انتماء عنصر تحدد مدى قربه من العناصر ذات الانتماء التام، وتحدد هذه الدرجة بين (الصفر والواحد).

فإذا كانت درجة انتماء العنصر (صفر) معنى ذلك أن هذا العنصر بعيد كل البعد عن العناصر ذات الانتماء التام والتي درجتها (الواحد)، وكلما كانت درجة الانتماء قريبة من الواحد كان قرب العنصر من العناصر ذات الانتماء التام كبيراً.

تعريف 7: دالة الانتماء[10]

دالة الانتماء μ_A هي دالة عددية تأخذ قيمتها في المجال$[0,1]$ يتم بواسطتها حساب درجة انتماء عنصر ما للمجموعة الضبابية.

فإذا كانت X مجموعة غير خالية وA مجموعة جزئية منها وليكن $I = [0,1]$ فتعرف دالة الانتماء $\mu_A: X \to I$ حيث تربط لكل عنصر $x \in X$ بالعدد الحقيقي $\mu_A(x)$.

تعريف 8: المركز الضبابي Fuzzy Center [7]

يتم تعريف المركز الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u} = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ كالتالي:

$$\tilde{u}^c = \frac{\underline{u}(r) + \overline{u}(r)}{2} \quad for\ all \quad 0 \le r \le 1$$

تعريف9: نصف القطر الضبابي Fuzzy Radius [11]

يعرف نصف القطر الضبابي للعدد العشوائي $\tilde{u} = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ كالتالي :

$$\Delta\tilde{u} = \frac{\overline{u}(r) - \underline{u}(r)}{2} \quad for\ all \quad 0 \le r \le 1$$

تعريف 10:مشتقة هوكوهارا Hukuhara Derivative [12 ,8]

ليكن $F: (a,b) \to R_F$ و $t_0 = (a,b)$. X قابلة للتفاضل في t_0 ،

إذا كان هناك $F'(t_0) \in R_F$ بحيث:

1. لكل $h > 0$ قريبة جداً من الصفر (فرق **Hukuhara**) $F(t_0+h)\Theta F(t_0)$ و $F(t_0)\Theta F(t_0-h)$ موجود (في المتريك D).

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0+h)\Theta F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0)\Theta F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$$

أو

2. لكل $h > 0$ قريبة جداً من الصفر(فرق **Hukuhara**) $F(t_0)\Theta(t_0+h)$ و $F(t_0-h)\Theta F(t_0)$ موجود (في المتريك D).

$$f:[t_0,t_0+a]\times R\to R, f\left(t,\left(\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\right)$$
$$=\left(\underline{f}\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right),f^c\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right),\overline{f}\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\right)$$

يمكننا تحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية التالية:

$$\begin{cases}\underline{u}=\underline{f}\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\\ u^c=f^c\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\\ \overline{u}=\overline{f}\left(t,\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\\ \underline{u}(0)=\underline{x}_0, u^c(0)=x_0^c, \overline{u}(0)=\overline{x}_0\end{cases}$$

3. المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n [5, 7, 11, 13, 14]

لنعتبر المعادلات التفاضلية الضبابية من الرتبة n في الصورة العامة كالتالي

$$\tilde{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\tilde{y}'(t;r)+a_0(t)\,\tilde{y}(t;r)=\tilde{g}(t;r)\,,\quad (11)$$

حيث $a_i(t), 0\le i\le n-1$ مستمرة في الفترة على فترة ما ومحدودة بالشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0)=\tilde{b}_0, \tilde{y}'(0)=\tilde{b}_1,\dots,\tilde{y}^{(n-1)}(0)=\tilde{b}_{n-1}$$

حيث $b_i(t), 0\le i\le n-1$ أعداد ضبابية. و $\tilde{y}(t,r)$ هو الحل الذي سيتم تحديده.

من خلال $r-cut\ approach$ نستطيع كتابة المعادلة التفاضلية الضبابية السابقة كما يلي:

$$\left[\underline{y}^{(n)}(t;r),\overline{y}^{(n)}(t;r)\right]+a_{n-1}(t)\left[\underline{y}^{(n-1)}(t;r),\overline{y}^{(n-1)}(t;r)\right]+\cdots+a_1(t)\left[\underline{y}'(t;r),\overline{y}'(t;r)\right]+a_0(t)\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]=\left[\underline{g}(t;r),\overline{g}(t;r)\right],\quad (12)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}(0;r),\overline{y}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_0(r),\overline{b}_0(r)\right],\left[\underline{y}'(0;r),\overline{y}'(0;r)\right]=\left[\underline{b}_1(r),\overline{b}_1(r)\right],\cdots,\left[\underline{y}^{(n-1)}(0;r),\overline{y}^{(n-1)}(0;r)\right]=\left[\underline{b}_{n-1}(r),\overline{b}_{n-1}(r)\right], where\ r\in[0,1],$$

نلاحظ أنه قد يكون لدينا ثلاث حالات فيما يتعلق بإشارة المعاملات.

الحالة الأولى

المعاملات $a_{n-1}(t), a_{n-2}(t),\cdots, a_1(t), a_0(t)$ كلها موجبة

باستخدام تعريف تفاضل Hukuhara يمكن أن نكتب المعادلة (12) على النحو التالي:

$$\underline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\underline{y}'(t;r)+a_0(t)\,\underline{y}(t;r)=\underline{g}(t;r)\,,\quad (13)$$

و

$$\overline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\overline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\overline{y}'(t;r)+a_0(t)\,\overline{y}(t;r)=\overline{g}(t;r)\,,\quad (14)$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{F(t_0)\Theta F(t_0+h)}{-h}=\lim_{h\to0^+}\frac{F(t_0-h)\Theta F(t_0)}{-h}=F'(t_0)$$

نظرية1:[11 ,8]

لتكن $F:(a,b)\to R_F$

ونرمز $[F(a;b)]=\left[\underline{f}(a;b),\overline{f}(a;b)\right]$ لكل $r\in[0,1]$:

1. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الأول (I) ، فإن $\underline{f}(a;b)$ و $\overline{f}(a;b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:
$$[F'(a;b)]=\left[\underline{f'}(a;b),\overline{f'}(a;b)\right].$$
2. إذا كانت F قابلة للتفاضل من النوع الثاني (II) ، فإن $\overline{f}(a;b)$ و $\underline{f}(a;b)$ تكون دوال قابلة للتفاضل ولدينا:
$$[F'(a;b)]=\left[\overline{f'}(a;b)\,,\underline{f'}(a;b)\right].$$

تعريف11: مسألة القيمة الابتدائية الضبابية Fuzzy Initial Value Problem [10 ,8]

لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى (FIVP).

$\tilde{x}'(t)=\tilde{f}(x,t)$ حيث $\tilde{x}$ دالة ضبابية في t ، $\tilde{f}(x,t)$ دالة ضبابية في المتغير t والمتغيرات الضبابية $\tilde{x}$ ، $\tilde{x}'$ هي تفاضلات *Hukuhara* الضبابية في $\tilde{x}$.

إذا كانت الشروط الابتدائية تعطى ب $\tilde{x}(t_0)=\tilde{x}_0$ فإن (FIVP) مسألة القيمة الابتدائية تكتب على الصورة :

$$\tilde{x}'(t)=\tilde{f}(x,t),\quad t_0\le t\le T\,,\qquad (8)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي $\tilde{x}'(t_0)=\tilde{x}_0$.

تعريف12: مسألة القيمة الحدية الضبابية Fuzzy Boundary Value Problem [7 ,4]

نكتب مسألة القيمة الحدية الضبابية (FBVP) من الرتبة n بالشكل:

$$\tilde{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\tilde{y}'(t;r)+a_0(t)\,\tilde{y}(t;r)=\tilde{g}(t;r)\,,\qquad (9)$$

حيث $a_i(t), 0\le i\le n-1$ مستمرة في الفترة I . مع مراعاة الشروط الحدودية الضبابية

$$\tilde{y}(a;r)=\left[\underline{\beta}(r),\overline{\beta}(r)\right],\tilde{y}(b;r)=\left[\underline{\gamma}(r),\overline{\gamma}(r)\right]$$

و $\tilde{y}(t,r)$ هو الحل الذي سيتم تحديده.

مبرهنة 1:[11]

إذا كانت $\tilde{u}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ دالة ذات قيمة ثلاثية ضبابية وإذا كانت $\tilde{u}$ قابلة لتفاضل **Hukuhara** فإن $\tilde{u}'=(x',y',z')$.

باستخدام تفاضل **Hukuhara** نوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الضبابية **(FIVP)**

$$\tilde{x}'(t)=\tilde{f}(x,t)\qquad (10)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي الضبابي $\tilde{x}'(t_0)=\tilde{x}_0$.

بحيث $\tilde{x}_0=(\underline{x}_0,x_0^c,\overline{x}_0)\in R, \tilde{x}(t)=\left(\underline{u},u^c,\overline{u}\right)\in R$

و

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}(0;r),\overline{y}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_0(r),\overline{b}_0(r)\right], \left[\underline{y}'(0;r),\overline{y}'(0;r)\right] = \left[\underline{b}_1(r),\overline{b}_1(r)\right],\cdots,\left[\underline{y}^{(n-1)}(0;r),\overline{y}^{(n-1)}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r),\overline{b}_{n-1}(r)\right], where\ r\in[0,1],$$

الحالة الثانية

المعاملات $a_{n-1}(t),a_{n-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ كلها سالبة

$$\underline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\overline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\overline{y}'(t;r)+a_0(t)\ \overline{y}(t;r)=\underline{g}(t;r)\,, \qquad (15)$$

و

$$\overline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)\underline{y}'(t;r)+a_0(t)\underline{y}(t;r)=\overline{g}(t;r)\,, \qquad (16)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}(0;r),\overline{y}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_0(r),\overline{b}_0(r)\right], \left[\underline{y}'(0;r),\overline{y}'(0;r)\right] = \left[\underline{b}_1(r),\overline{b}_1(r)\right],\cdots,\left[\underline{y}^{(n-1)}(0;r),\overline{y}^{(n-1)}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r),\overline{b}_{n-1}(r)\right], where\ r\in[0,1],$$

الحالة الثالثة

المعاملات $a_{n-1}(t),\cdots,a_{n-m}(t)$ تكون موجبة

و $a_{n-m-1}(t),\cdots,a_{n-m-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ تكون سالبة.

من المعادلة (12) تكون لدينا:

$$\underline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_{n-m}(t)\underline{y}^{(n-m)}(t;r)+a_{n-m-1}(t)\overline{y}^{(n-m-1)}(t;r)+a_0(t)\ \overline{y}(t;r)=\underline{g}(t;r)\,, \qquad (17)$$

و

$$\overline{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\overline{y}^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_{n-m}(t)\overline{y}^{(n-m)}(t;r)+a_{n-m-1}(t)\underline{y}^{(n-m-1)}(t;r)+a_0(t)\ \underline{y}(t;r)=\overline{g}(t;r)\,, \qquad (18)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\left[\underline{y}(0;r),\overline{y}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_0(r),\overline{b}_0(r)\right], \left[\underline{y}'(0;r),\overline{y}'(0;r)\right] = \left[\underline{b}_1(r),\overline{b}_1(r)\right],\cdots,\left[\underline{y}^{(n-1)}(0;r),\overline{y}^{(n-1)}(0;r)\right] = \left[\underline{b}_{n-1}(r),\overline{b}_{n-1}(r)\right], where\ r\in[0,1],$$

4. طريقة المركز الضبابي (Fuzzy Centre -Based Methods) لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n [8, 9, 11]

تمت مناقشة طريقة المركز الضبابي(FCM) باستخدام المركز الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية من الرتبة، وفيما يتعلق بثلاث حالات. أولا يتم الحصول على حل المركز الضبابي ثم يتم كتابة الحد الأدنى بدلالة المركز الضبابي. ومن هذا يمكن أن نجد الحد الأعلى للحل الضبابي. وبالمثل يمكن الحصول على الحد الأدنى.

الحالة1: المعاملات $a_{n-1}(t),a_{n-2}(t),\cdots,a_1(t),a_0(t)$ كلها موجبة.

أولاً: يمكن كتابة المعادلة (11) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$(\tilde{y}^c)^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)(\tilde{y}^c)^{(n-1)}(t;r)+\cdots+a_1(t)(\tilde{y}^c)'(t;r)+a_0(t)(\tilde{y}^c)(t;r)=\tilde{g}^c(t;r) \qquad (19)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}^c(0)=\tilde{b}_0,(\tilde{y}^c)'(0)=\tilde{b}_1,\ldots,(\tilde{y}^c)^{(n-1)}(0)=\tilde{b}_{n-1}$$

يمكن بسهولة حل المعادلة (19) للحصول على $\tilde{y}^c$ بأي طريقة قياسية. الان عند حل المعادلة (13) أو (14)، يمكن الحصول على $\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)$ على التوالي. بعد ذلك، باستبدال القيمة $\tilde{y}^c$ المذكورة أعلاه لـ $\underline{y}(t;r)$ أو $\overline{y}(t;r)$ لتعريف المركز الضبابي، قد نجد الحل $\underline{y}=2\tilde{y}^c-\overline{y}$ أو $\overline{y}=2\tilde{y}^c-\underline{y}$.

مثال1:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}''+8\tilde{y}'+16\tilde{y}=0$$

مع مراعاة الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0)=[0.1r+1.9,2.1-0.1r],$$
$$\tilde{y}'(0)=[0.1r-3.1,-2.9-0.1r]$$

الحل:

الحل الضبابي المضبوط كالتالي:

$$\underline{Y}(t;r)=\left(\frac{1}{10}r+\frac{19}{10}\right)e^{-4t}+\left(\frac{1}{2}r+\frac{9}{5}\right)te^{-4t}$$
$$\overline{Y}(t;r)=\left(\frac{21}{10}-\frac{1}{10}r\right)e^{-4t}+\left(\frac{11}{2}-\frac{1}{2}r\right)te^{-4t}$$

وعند الحل نحصل على:

$$\tilde{y}^c(t;r)=(2+4t)e^{-4t}$$

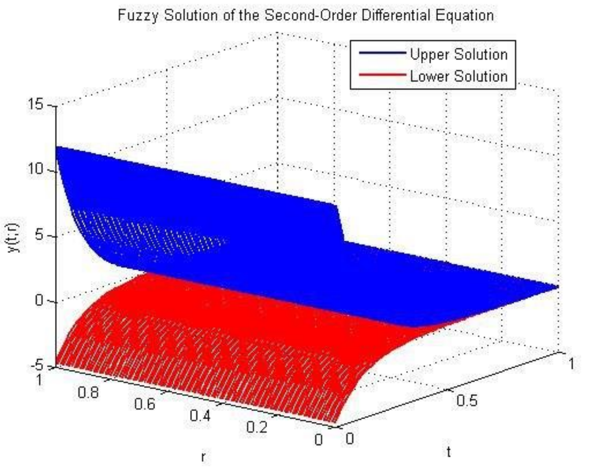
وحل أي من المعادلات تعطى القيمة على النحو التالي:

$$\underline{y}(t;r)=\left(\frac{1}{10}r+\frac{19}{10}\right)e^{-4t}+\left(\frac{1}{2}r+\frac{9}{5}\right)te^{-4t}$$
$$\overline{y}(t;r)=\left(\frac{21}{10}-\frac{1}{10}r\right)e^{-4t}+\left(\frac{11}{2}-\frac{1}{2}r\right)te^{-4t}$$

هنا نجد الحل:

$$\tilde{y}^c(t;r)=\left[\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right]$$
$$\underline{y}(t;r)=\left(\frac{1}{10}r+\frac{19}{10}\right)e^{-4t}+\left(\frac{1}{2}r+\frac{9}{5}\right)te^{-4t}$$
$$\overline{y}(t;r)=\left(\frac{21}{10}-\frac{1}{10}r\right)e^{-4t}+\left(\frac{11}{2}-\frac{1}{2}r\right)te^{-4t}$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل الاتي:



شكل4: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 1

الحالة2:المعاملات$a_{n-1}(t), a_{n-2}(t), \cdots, a_1(t), a_0(t)$كلها سالبة. يمكن كتابة المعادلة (11) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$(\tilde{y}^c)^{(n)}(t;r) - a_{n-1}(t)(\tilde{y}^c)^{(n-1)}(t;r) - \cdots + a_1(t)(\tilde{y}^c)'(t;r) - a_0(t)(\tilde{y}^c)(t;r) = \tilde{g}^c(t;r) \qquad (20)$$

مع الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}^c(0) = \tilde{b}_0, (\tilde{y}^c)'(0) = \tilde{b}_1, \ldots, (\tilde{y}^c)^{(n-1)}(0) = \tilde{b}_{n-1}$$

يمكن للحصول على$\tilde{y}^c(t;r)$ حل المعادلة (20) باستخدام تعريف المركز الضبابي يمكن كتابة المعادلتين (15)و (16) على النحو التالي:

$$\underline{y}^{(n)}(t;r) + a_{n-1}(t)(2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r))^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)(2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r))' + a_0(t)\ (2\tilde{y}^c(t;r) - \underline{y}(t;r)) = \underline{g}(t;r) \qquad (21)$$

و

$$\overline{y}^{(n)}(t;r) + a_{n-1}(t)(2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r))^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)(2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r))' + a_0(t)\ (2\tilde{y}^c(t;r) - \overline{y}(t;r)) = \overline{g}(t;r) \qquad (22)$$

يمكن ملاحظة المعادلات التفاضلية المذكورة أعلاه أصبحت الان معادلة تفاضلية واضحة، يمكن الحصول على ذلك الحل لـ $\underline{y}(t;r)$أو$\overline{y}(t;r)$ وتطبيق تعريف المركز الضبابي، قد نجد الحل $\underline{y} = 2\tilde{y}^c - \overline{y}$ أو $\overline{y} = 2\tilde{y}^c - \underline{y}$.

مثال2:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' - 5\tilde{y} = 0$$

مع مراعاة الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.1r + 0.9, 1.1 - 0.1r],$$
$$\tilde{y}'(0) = [0.1r + 1.9, 2.1 - 0.1r]$$

الحل الضبابي المضبوط يتم الحصول عليه كالتالي:

$$\underline{Y}(t;r) = \left(\frac{1}{10}r + \frac{8}{10}\right)e^{-t} + \frac{2}{10}e^{5t} - \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + (\frac{-3}{10}r - \frac{15}{10})e^{-2t}\sin t$$

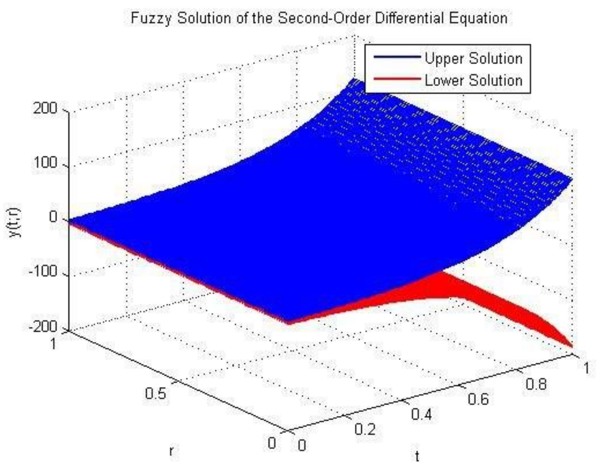
$$\overline{Y}(t;r) = \left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}r\right)e^{-t} + \frac{2}{10}e^{5t} - \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + (\frac{-21}{10} + \frac{3}{10}r)e^{-2t}\sin t$$

يمكننا إيجاد حل المركز الضبابي وتطبيق الطريقة الأولى لنحصل على الحل التالي:

$$\underline{y}(t;r) = \left(\frac{1}{10}r + \frac{8}{10}\right)e^{-t} + \frac{2}{10}e^{5t} - \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + (\frac{-3}{10}r - \frac{15}{10})e^{-2t}\sin t$$

$$\overline{y}(t;r) = \left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}r\right)e^{-t} + \frac{2}{10}e^{5t} - \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + (\frac{-21}{10} + \frac{3}{10}r)e^{-2t}\sin t$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل الاتي:



شكل5: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال 2

الحالة3: المعاملات$a_{n-1}(t), \cdots, a_{n-m}(t)$ كلها موجبة و $a_{n-m-1}(t), a_{n-m-2}(t), \cdots, a_1(t), a_0(t)$ كلها سالبة.

يمكن كتابة المعادلة (11) بدلالة المركز الضبابي بالشكل التالي:

$$(\tilde{y}^c)^{(n)}(t;r) + a_{n-1}(t)(\tilde{y}^c)^{(n-1)}(t;r) + \cdots + a_{n-m}(t)(\tilde{y}^c)^{(n-m)}(t;r) - a_{n-m-1}(t)(\tilde{y}^c)^{(n-m-1)}(t;r) + \cdots - a_0(t)(\tilde{y}^c)(t;r) = \tilde{g}^c(t;r) \qquad (23)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}^c(0) = \tilde{b}_0, (\tilde{y}^c)'(0) = \tilde{b}_1, \ldots, (\tilde{y}^c)^{(n-1)}(0) = \tilde{b}_{n-1}$$

وبالمثل يمكن للحصول على$\tilde{y}^c(t;r)$ حل. بعد ذلك يمكن كتابة المعادلتين (17) و (18) على النحو التالي:

$$\underline{y}^{(n)}(t;r) + a_{n-1}(t)\underline{y}^{(n-1)}(t;r) + \cdots + a_{n-m}(t)\underline{y}^{(n-m)}(t;r) + a_{n-m-1}(t)\left(2y^{c}(t) - \underline{y}(t;r)\right)^{(n-m-1)} + \cdots + a_{0}(t)\left(2y^{c}(t;r) - \underline{y}(t;r)\right) = \underline{g}(t;r) \qquad (24)$$

و

$$\overline{y}^{(n)}(t;r) + a_{n-1}(t)\,\overline{y}^{(n-1)}(t;r) + \cdots + a_{(n-m)}(t)\,\overline{y}^{(n-m)}(t;r) + a_{(n-m-1)}(t)(2y^{c}(t) - \overline{y}(t;r))^{(n-m-1)} + \cdots + a_{0}(t)(2y^{c}(t;r) - \overline{y}(t;r)) = \overline{g}(t;r) \qquad (25)$$

مثال3:

عين حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$$\tilde{y}''' - 6\tilde{y}'' + 11\tilde{y}' - 6\tilde{y} = 0$$

الخاضعة للشروط الشروط الابتدائية الضبابية

$$\tilde{y}(0) = [0.1r + 0.9, 1.1r + 0.1r],$$
$$\tilde{y}'(0) = [0.1r + 0.9, 1.1r + 0.1r],$$
$$\tilde{y}''(0) = [0.1r + 1.9, 2.1r - 0.1r]$$

الحل:

الحل الضبابي المضبوط كالتالي:

$$\underline{Y}(t;r) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}r\right)e^{-3t} - \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}r\right)e^{-2t} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}r\right)e^{-t}$$

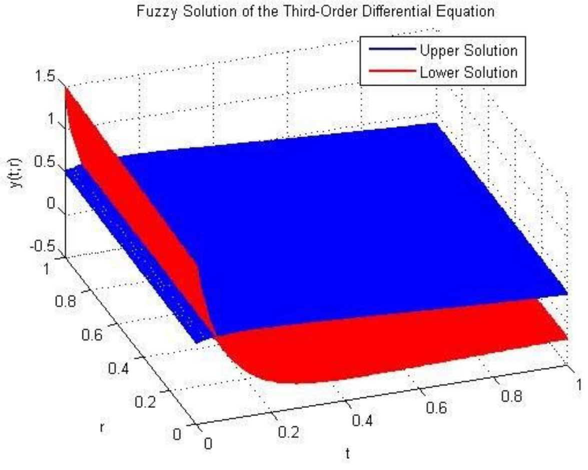
$$\overline{Y}(t;r) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}r\right)e^{-3t} - \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}r\right)e^{-2t} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}r\right)e^{-t}$$

الحل باستخدام الطريقة المقترحة يكون على الصورة:

$$\underline{y}(t;r) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}r\right)e^{-3t} - \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}r\right)e^{-2t} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}r\right)e^{-t}$$

$$\overline{y}(t;r) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}r\right)e^{-3t} - \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}r\right)e^{-2t} - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}r\right)e^{-t}$$

ويظهر الحل الضبابي بالشكل الاتي:



شكل6: الحل الضبابي للمعادلة التفاضلية الضبابية بالمثال3

5. النتائج والمناقشة

أثبتت طريقة المركز الضبابي قدرتها على تقديم حلول للمعادلات التفاضلية الضبابية، ,تعتمد خطوات حل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية بطريقة المركز الضبابي على نوع المعادلة وخصائصها وتنافس في دقتها الحلول العددية الأخرى مع ميزة كونها أكثر كفاءة من الناحية الحسابية، حيث تم تطبيقها بنجاح على معادلات تفاضلية ضبابية ذات معاملات موجبة وسالبةومختلطة، ففي المثال الأول كانت المعاملات جميعها موجبة وتم حل هذه المعادلة باستخدام طريقة المعادلة المميزة بعد تحويل المعادلة التفاضلية الضبابية الى معادلة تفاضلية عادية وفي المثال الثاني الذي كان فيه المعاملات جميعها سالبة تم حل هذه المعادلة بطريقة المؤثر التفاضلي واعطت نتائج افضل من حل المعادلة بطريقة المعادلة المميزة التي اقتصرت على المعاملات الموجبة فقط وفي المثال الثالث تم حل هذه المعادلة باستخدام المؤثر التفاضلي وقد أظهرت هذه الطريقة مرونة كبيرة في التعامل مع مختلف أنواع المعادلات، وتم التحقق من دقة الحلول الناتجة ومقارنتها بالطرق التحليلية والعددية [13, 14] وكذلك تم التأكد من صحة الحلول باستخدام برنامج المحاكاة ماتلاب ورسم هذه الحلول التي اظهرت دقتها مما يجعل هذه الطريقة خيارًا فعالًا لحل مجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية الضبابية بشكل عام.

6. التوصيات

تعتبر طريقة المركز الضبابي أداة قوية لحل المعادلات التفاضلية الضبابية التي تظهر في العديد من المجالات العلمية والهندسية، وتتميز هذه الطريقة بقدرتها على التعامل مع عدم اليقين والضبابية في البيانات، وقد أثبتت الدراسات والتطبيقات العملية فعالية هذه الطريقة في حل مجموعة واسعة من المشكلات، مما يجعلها أداة أساسية في مجال النمذجة والتحليل الرياضي للأنظمة المعقدة ، لذلك يوصي الباحثان التوسع في حل معادلات تفاضلية ضبابية من رتب عليا بطريقة المركز الضبابي ودراسة وتطوير طرق أخرى وتحسين تقنياتها لتوسيع نطاق تطبيقاتها.

قائمة المراجع

[1]- Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores, "Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 160, pp. 1517-1527, 2009/06/01/ 2009.

[2]- M. Mazandarani and L. Xiu, "A review on fuzzy differential equations," *IEEE access,* vol. 9, pp. 62195-62211, 2021.

[3]- N. Gasilov, Ş. Amrahov, and A. Fatullayev, "A Geometric Approach to Solve Fuzzy Linear Systems of Differential Equations," *CoRR,* vol. abs/0910.4307, 10/22 2009.

[4]- J. J. Buckley and T. Feuring, "Fuzzy initial value problem for Nth-order linear differential equations," *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 121, pp. 247-255, 2001/07/16/ 2001.

[5]- T. Allahviranloo, E. Ahmady, and N. Ahmady, "A method for solving nth order fuzzy linear differential equations," *International Journal of Computer Mathematics,* vol. 86, pp. 730-742, 2009/04/01 2009.

[6]- R. H. Ibraheem, "Solving Linear and Nonlinear Systems of Fuzzy Differential Equations by Using Differential Transform Method," *Journal of the College of Basic Education,* vol. 28, pp. 20 - 37, 04/07 2022.

[7]- S. Chakraverty, S. Tapaswini, and D. Behera, *Fuzzy arbitrary order system: fuzzy fractional differential equations and applications*: John Wiley & Sons, 2016.

[8]- S. Chakraverty, S. Tapaswini, and D. Behera, *Fuzzy differential equations and applications for engineers and*

scientists: CRC Press, 2016.

[9]- T. Allahviranloo, E. Ahmady, and N. Ahmady, "Nth-order fuzzy linear differential equations," *Information Sciences,* vol. 178, pp. 1309-1324, 2008/03/01/ 2008.

[10]-D. N. Georgiou, J. J. Nieto, and R. Rodríguez-López, "Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* vol. 63, pp. 587-600, 2005/11/15/ 2005.

[11]-S. Chakraverty, D. S. Tapaswini, and D. D. Behera, *Fuzzy Arbitrary Order System: Fuzzy Fractional Differential Equations and Applications*, 2016.

[12]-M. Chehlabi and T. Allahviranloo, "Existence of generalized Hukuhara differentiable solutions to a class of first-order fuzzy differential equations in dual form," *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 478, p. 108839, 2024/02/15/ 2024.

[13]-M. Z. Ahmad, M. Hasan, and B. De Baets, "Analytical and Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations," *Information Sciences,* vol. 236, pp. 156-167, 07/01 2013.

[14]-X. Guo and D. Shang, "Approximate Solution of th-Order Fuzzy Linear Differential Equations," *Mathematical Problems in Engineering,* vol. 2013, 01/01 2013.