SEBHA UNIVERSITY JOURNAL OF PURE & APPLIED SCIENCES VOL.20 NO. 2 2021
DOI: 10.51984/JOPAS.V20I2.1384

مجلة جامعة سبها للعلوم البحتة والتطبيقية
Sebha University Journal of Pure & Applied Sciences

Journal homepage: www.sebhau.edu.ly/journal/index.php/jopas

مفهوم النموذج الرياضي لمعادلة شرودنجر الزمنية باستخدام معادلات ماكسويل والنسبية الخاصة

*زيدان ضو اهويدي[1] و حامد محمد مالك[1] و عبدالسلام أبراهيم منصور[1] و هناء عبدالسلام سالم[1] و أبوبكر مفتاح احسونه[2]

[1] قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة سبها، سبها، ليبيا
[2] قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة سبها، سبها، ليبيا

الملخص

تهدف هذه الدراسة النظرية إلي اشتقاق معادلة شرودنجر الزمنية باستخدام معادلة الموجة للمجال الكهربائي المشتقة من معادلات ماكسويل إلى جانب استخدام علاقة الطاقة-كمية الحركة النسبية لاينشتاين. أولاً أشتقت معادلة الموجة للمجال الكهربائي من معادلة ماكسويل. حيث يكون حل معادلة الموجة دالة في التردد ودالة الموجة، ومن أجل ربط حل معادلة الموجة بخصائص الجسيمات تم التعبير عن التردد بمصطلح طاقة الفوتون ودالة الموجة يعبر عنها بمصطلح كمية حركة الفوتون وتم ذلك باستخدام النسبية الخاصة، ومن ثم أتضح انه من الممكن التعبير عن طاقة وكمية حركة الفوتون بصيغ تفاضلية جزئية تسمى المؤثرات أيضاً بالتناظر ومن المنطقي جداً أفترض أن الجسيم يمتلك الخاصية الازدواجية(موجة- جسيم) وأخيرا تم إنشاء معادلة موجية لجسيم متحرك من خلال استبدال متجه المجال الكهربائي بدالة الموجة حيث يرتبط المصطلحين بالكثافة العددية للفوتون، و التعبير عن طاقة وكمية حركة الجسيم بمؤثراتها الكمية.

الكلمات المفتاحية:

الخاصية الازدواجية(موجة- جسيم)
معادلة شرودنجر
معادلات ماكسويل
النسبية الخاصة

A mathematical modeling concept of the time dependent Schrödinger's equation using Maxwell's equations and special relativity

*Z. D. Ahwidy [1], H.M.A.Malek[1], Abdussalam E. Mansur[1], Hana. A. S. Salem[1], Boubaker. M. Hosouna[2]

[1] Physics department, faculty of Science, Sebha University, Libya
[2] chemistry department, faculty of Science, Sebha University, Libya

Keywords:
wave-particle duality
Schrödinger's equation
Maxwell's equation
special relativity

ABSTRACT

This theoretical study aims to derive the time dependent Schrödinger's equation using the electric field wave equation derived from Maxwell's equations and Einstein's relativistic energy-momentum relation. First, the electric field wave equation is derived from Maxwell's equation. Where the solution of the wave equation is a function of the frequency and wave function, and in order to associate the solution of the wave equation with the properties of particles, the frequency is expressed in terms of photon energy and the wave function is expressed in terms of photon momentum and it was done using special relativity, and then it became clear that it is possible to express energy and momentum of the photon with partial differential forms called operators. . By symmetry, it is very reasonable to assume that a particle can have the wave-particle duality. Therefore, last, it was established a wave equation for a moving particle by replacing the vector of the electric field with the wave function where the two terms are related to the numerical density of the photon, and the expression of energy and momentum of particle with their operators.

المقدمة

تعد معادلات ماكسويل واحدة من أهم المعادلات التي تصف سلوك الموجات الكهرومغناطيسية وتداخل وحيود الضوء وكذلك توليد وانعكاس ونفاذ وتفاعل الموجات الكهرومغناطيسية مع المادة. ولفترة طويلة تم اعتبار أن الضوء له طبيعة موجية فقط ولكن هذه الطبيعة لم تستطع وصف وتفسير

*Corresponding author:
E-mail addresses: Zid.Ahwidy@sebhau.edu.ly, (H.M.A.Malek) Ham.malak@sebhau.edu.ly, (A.E.Mansur) abd.mansur@sebhau.edu.ly, (H.A.S.Salem) Han.salem@sebhau.edu.ly , (B.M.Hosouna) Bou.hosouna@sebhau.edu.ly

Article History : Received 09 August 2021 - Received in revised form 30 October 2021 - Accepted 31 October 2021

ظاهرة اشعاع الجسم الاسود وهذا جعل بلانك لاحقاً يقترح أن الضوء والموجات الكهرومغناطيسية تتصرف كجسيمات منفصلة عرفت لاحقاً باسم الفوتونات. هذه الطبيعة الجسيمية نجحت في وصف عدد من الظواهر الفيزيائية مثل الإشعاع الذري والظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتون وإنتاج الأزواج، يحتاج شرح انتاج الازواج إلى الطبيعة الجسيمية للضوء وكذلك إلى النسبية الخاصة[2,1].هذه الطبيعة المزدوجة للضوء شجعت دي برولي على اقتراح أن الجسيمات مثل الالكترونات يمكن أن تتصرف في بعض الاحيان كموجات. التأكيد التجريبي لهذه الفرضية أدي إلى صياغة قوانين فيزيائية جديدة تعرف باسم ميكانيكا الكم، تم صياغة ميكانيكا الكم أولاً بواسطة هيزنبرج ثم وبشكل مستقل بواسطة شرودنجر لوصف الطبيعة المزدوجة للعالم الذري.على الرغم من أن فرضية دي برولي اعتمدت على تعبير بلانك للطاقة وكذملك إلى النسبية الخاصة، ولكن لم يتم ربط ذلك بمعادلات ماكسويل[4,3]. اهتمت الكثير من الدراسات النظرية باشتقاق معادلة شرودنجر الزمنية مستخدمةً الميكانيكا الكلاسيكية نورد منها التالي: دراسة Adam Mohammed Ismail التي استخدمت معادلة الموجة للمجال الكهربائي المستنتجة من معادلات ماكسويل بدلالة تنائي العزم الكهربائي وعلاقة الموصلية الكهربائية وكثافة التيار، مع الأخذ في الاعتبار أن كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية تتناسب مع E^2 وبما ان $|\Psi|^2$ تعكس أيضا كثافة الفوتون وعليه يمكن استبدال متجه المجال الكهربائي بدالة الموجة لتحقيق معادلة شرودنجر المعتمدة علي الزمن[4]. ومن الدراسات المشابهة في هذا المجال النظري دراسة كل من Ward وNilesh et.al والتي تقوم علي امتداد معادلة الموجة للمجالات الكلاسيكية لتشمل الفوتونات، والتعميم علي الجسيمات ذات الكتلة غير الصفرية من خلال استخدام التقريب المتسق مع الجسيمات اللانسبية. [6,5] أما دراسة Pranab Rudra Sarma اعتمدت علي استخدام معادلة هاملتون- جاكوبي الكلاسيكية ومبدأ عدم الارتياب في حين أن دراسةHye Jung Kang استخدمت النظرية الكهرومغناطيسية والنسبية الخاصة وتطبيق تكميم الطاقة واستخدام مبدأ الازدواجية (موجة-جسيم) للوصول إلي معادلة شرودنجر ووجدت هاتين الدراستين انه يمكن التعبير عن قيم الطاقة وكمية الحركة القابلة للقياس بصيغ تفاضلية جزئية تسمي المؤثرات[8,7]. أيضاً تطرقت دراسة J.H.Field إلي استكشاف بعض الروابط بين ميكانيكا الكم والفيزياء الكلاسيكية. حيث يتم فهم علاقات بلانك- اينشتاين و دي برولي، و أيضاً دالة الموجة وتفسيرها الاحتمالي، وعلاقات التبديل القانونية ومعادلة ماكسويل-لورنتز بطريقة بسيطة من خلال مقارنة الكهرومغناطيسية الكلاسيكية والوصف الفوتوني للضوء الذي توفره الكينماتيكا النسبية الكلاسيكية .و وصف الطريقة المستخدمة بأنها `` مراسلات عكسية '' حيث تظهر الظواهر الكمومية عند النظر في انخفاض كثافة عدد الفوتون للكهرومغناطيسية الكلاسيكية. التعميم على الجسيمات الضخمة يؤدي إلى معادلات كلاين - جوردون و شرودنجر. كما تمت مناقشة الفرق بين دالة الموجة الكمومية للفوتون والموجة الكهرومغناطيسية الكلاسيكية في بعض تفاصيل دراسة J.H.Field. [9]. يهدف هذا البحث لإقامة روابط إضافية من اجل اشتقاق معادلة شرودنجر الزمنية من خلال معادلات ماكسويل وعلاقة الطاقة- كمية الحركة لاينشتاين.كما أن المستهدف من هذه الدراسة النظرية فئة المبتدئين في دراسة ميكانيكا الكم وعلى وجه الخصوص الطلبة الجامعيين والذين غالبا ما يجدون صعوبة في إثبات هذه المعادلة والتي تعتبر بمثابة حجر الزاوية لميكانيكا الكم. في هذه الدراسة سنعمل على اشتقاق معادلة شرودنجر بوصف مفصل مع استنتاج كل خطوة صغيرة متضمنة في هذا الاشتقاق. ومن ناحية أخرى فإن الأهمية القصوى تأتي من خلال اشتقاق هذه المعادلة عن طريق استخدام الميكانيك الكلاسيكي ومبادئ النظرية النسبية الخاصة. بجانب استخدام لغة كتابة وصفية محددة ومفهومة وطرق رياضية أساسية أولية واستخدام المنهج الاستنباطي الذي يعتمد على المنهج الاستدلالي الرياضي.

لمحة تاريخية عن الميكانيكا الكمية والموجية.

لقد كان الرأي السائد إلي حدود نهاية القرن التاسع عشر أن تجليات الطاقة في مختلف الميادين تتم بشكل متصل فالطاقة الكهربائية تسري في الأسلاك بشكل متصل مثلها مثل أنواع الطاقة الأخرى .وهذا يعني انه من الممكن تخفيض شدة التيار الكهربائي إلى أقصى حد دون أن يحدث فيه أي انقطاع ومثل ذلك الطاقة الحرارية فلقد كان الاعتقاد السائد أن درجه حرارة جسم ما يمكن رفعها أو خفضها بكيفية متصلة أي بكميات يمكن الزيادة فيها أو النقصان منها دون التقيد بكمية محددة لا تقبل التجزئة وكذلك الشأن في الطاقة الضوئية إذ كان ينظر إلى الشعاع الضوئي على انه مكون من موجات تحمل عبر مسافات بعيدة طاقة ضوئية بكميات غير محدودة الصغر أي انه يمكن تخفيض كمية الطاقة الضوئية بصورة متصلة لا نهاية لها ,والذي يوافق النظرية الموجية لماكسويل Maxwell ومن خلال معادلته المشهورة التي اثبت أن الضوء عبارة عن موجات كهرومغناطيسية. ولكن هذا التصور تعرض لضربة قاضية مفاجئة عام 1900 على يد العالم الألماني ماكس بلانك Max Planck الذي نادي بأن الطاقة مثلها مثل المادة والكهرباء لا تظهر إلا بصورة منفصلة متقطعة أي علي شكل حبات أو وحدات محددة تسمى في الاصطلاح العلمي بالكوانتوم (Quantum) والجمع (Quanta) فالكوانتوم اذاً هو أصغر كمية من الطاقة يمكن أطلاقها أو امتصاصها. ونجح في جهوده لشرح ظاهرة إشعاع الجسم الأسود[10]. وأفترض أن الذرات غير قادرة علي تغيير طاقتها بشكل مستمر وان طاقة اهتزاز الذرات في الجسم الصلب لها ترددات محددة فقط وتساوي $E = nh\nu, n = 0,1,2,3 \ldots$ أي أن طاقة الذرة المهتزة تساوي حاصل عدد صحيح في ثابت بلانك وفي تردد الاهتزاز حيث أن ثابت بلانك $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s وأفترض أن الطاقة مكمأة أي أنها توجد علي شكل حزم أوكميات معينة والذرة المهتزة تشع موجات كهرومغناطيسية فقط عندما تتغير طاقة اهتزازها من حالة لآخري،علي عكس توقع ماكسويل والذي يري بان الذرة المهتزة تشع موجات كهرومغناطيسية بشكل دائم ومستمر. في عام 1905 قدم أينشتاينEinstein اندماجا قويا لمفهوم بلانك الكمي في محاولة لفهم التأثير الكهروضوئي ، أدرك أينشتاين أن فكرة بلانك عن تكميم الموجات الكهرومغناطيسية يجب أن تكون صالحة للضوء أيضًا. لذا ، بإتباع نهج بلانك، افترض أن الضوء نفسه يتكون من أجزاء متقطعة من الطاقة (أو جسيمات دقيقة)، تسمى فوتونات طاقتها ترتبط بترددها من خلال العلاقة $E = h\nu$. أساس مفهوم الفوتون مكّن آينشتاين من تقديم تفسير دقيق وأنيق للظاهرة الكهروضوئية ، والتي كانت تنتظر الحل منذ أول ملاحظة تجريبية لهيرتزHertz في عام1887[12,11]. كان الإنجاز الرئيسي الآخر هو لنيلز بورBohr مباشرة بعد تجربة رذرفورد وهو اكتشاف النواة الذرية في عام 1911 والجمع بين النموذج الذري لرذرفورد ، ومفهوم الكم لبلانك ، وفوتون أينشتاين، قدم بور في عام 1913 نموذجه لذرة لهيدروجين. في هذا العمل،

أفترض بأن الذرات يمكن أن توجد فقط في حالات منفصلة للطاقة و أن تفاعل الذرات مع الإشعاع أي انبعاث أو امتصاص الإشعاع بواسطة الذرات، تحدث فقط بكميات منفصلة من الطاقة مقدارها hv لأنها تنتج عن انتقالات الذرة بين مختلف حالات الطاقة المنفصلة. قدم هذا العمل تفسيرا مرضيا للعديد من المسائل التي كانت عالقة مثل الاستقرار الذري و التحليل الطيفي الذري. ثم في عام 1923 قام كومبتون باكتشاف مهم أعطى تأكيدًا حاسمًا للجانب الجسيمي للضوء، وأكد أنه بتشتت الأشعة السينية بالإلكترونات أن فوتونات الأشعة السينية تتصرف مثل الجسيمات ذات كمية حركة قياسها $^{hv}/_{c}$ ؛حيث v هو تردد الأشعة السينية. أعطت هذه السلسلة من التفسيرات والاكتشافات لكل من بلانك ، وأينشتاين، وبور ، وكومبتون الأسس النظرية والتأكيد التجريبي القاطع للجسيم جانب من الموجات. بمعنى أن المفهوم الذي تظهره الموجات هو سلوك الجسيمات عند المقياس المجهري. في عام 1923 قدم دي برولي De Broglie مفهوم آخر جديد وهو أن الشعاع الضوئي يتألف من كمات .تماماً كما تقول النظرية الكمومية ولكن لكل كمة ضوئية (أي فوتون) موجة خاصة تصحبه باستمرار وتردد هذه الموجة يتناسب مع طاقة الفوتون حسب قانون بلانك.الموجة المصاحبة للفوتون تجعله يشغل حيزاً لا يمكن ضبطه بدقة ومن ثم يصبح من الصعب أن ينسب إليه موضعاً معيناً وفي هذه الحالة يكون للفوتون تواجد في جميع نقاط الحيز المكاني الذي تشغله موجته. ولكن عندما يرتسم الفوتون علي الشاشة مثلاً يكشف لنا عن موضعه بالضبط.(انه كالسحابة تنتشر في السماء كموجة ولكنها تنقلب إلي حبة ماء في حالة معينة) وعندما تحدث هذه الظاهرة يتلاشي حضوره المنتظم في الموجة ويصبح من الممكن ضبط موضعه باحتمال يتناسب مع شدة الموجة في النقطة التي كشف فيها عن نفسه. وبذلك يمكن القول: عندما يكشف الفوتون عن مظهره الجسيمي بتموضعه في موقع معين يختفي مظهره الموجي، وعندما يتأكد مظهره الموجي أي عندما ينتشر كالسحابة يصبح من المستحيل الحصول منه علي طبيعته الجسيمية. تلك هي الفكرة الأساسية في الميكانيكا الموجية أي العلم الذري الذي يدرس حركة الجسيمات الذرية بوصفها جسيمات مصحوبة بموجات. عزز فرضية دي برولي كشف جاء به كل من دافيسون وجيرمر في عام 1927 إذ وجدا أن الإلكترونات المنعكسة عن سطح بلوري معدني تُظهر أنماط تداخل بناء وهدام كما لو كانت حزمة الإلكترونات حزمة من الضوء تتداخل مع ذاتها .وتحصل هذه الظاهرة نتيجة تشتيت السطح المعدني الإلكترونات الواقعة عليه بصورة منتظمة كما هو الحال عندما يتشتت الضوء عن محزوز حيود عاكس. [13,10]. إن اكتشاف هذه الخاصية المزدوجة (الموجة-الجسيم) أدي إلي فترة مزدهرة في تاريخ الفيزياء والتي ظهر فيها صياغتين جديدتين لميكانيكا الكم هما: ميكانيكا المصفوفات وميكانيكا الموجة فالفكرة التي أنتهي إليها دي برولي من خلال أبحاثه في ميدان الضوء هي نفس النتيجة التي توصل إليها الفيزيائي هيزنبرج Heisenbergعام 1925 ولكن بسلوك أخر واستعمال لغة أخري مما أدي إلي أنشاء الميكانيكا الكمومية الذرية المصفوفية فهي تدرس حركة الجسيمات وتنطلق من فكرة كوانتوم الطاقة وثابت بلانك وهي ذرية لان المشاكل التي أدت إلي قيامها هي مشاكل تتعلق ببنية الذرة وهي مصفوفية لأنها اعتمدت نوعاً خاصاً من الحساب هو حساب المصفوفات. أدخل هيزنبرج حساب المصفوفات في ميدان الذرة فتمكن من صياغة المعادلة التي "تضبط" حركة الإلكترون في الذرة، متصوراً هذه الحركة لا علي أنها عبارة عن انتقال الإلكترون من مدار إلي آخر، بل بوصفها تغييراً وتعديلاً لحالة المنظومة الذرية مع الزمن، تغييراً تضبطه المصفوفات بطريقة احتمالية بواسطة معادلة خاصة هي معادلة علاقات الارتياب. لقد ركز هيزنبرج علي مفهوم الكم وناقش استحالة استمرار التحديد اللانهائي الدقيق لكل من الموضع وكمية الحركة لجسيم متحرك وقام بنشر مبدأ الريبة والذي ينص علي انه "لايمكن تحديد موضع الإلكترون وكمية حركته في آن واحد".كما مكنَّت العلاقة التي أقترحها لويس دي برولي الفيزيائي شرودنجر في عام 1926 من أن يبني تصوره لحركة الجسيم وفق المفاهيم الجديدة فقد تعامل مع الجسيم ممثلاً بموجة سماها دالة الموجة وافترض لها معادلة حركة موجية تتطابق والصيغة الكلاسيكية النيوتينية للطاقة الحركية للجسيم فكانت معادلة شرودنجر اللانسبوية الشهيرة. وبموجب هذه المعادلة يمكن معالجة النظم الميكانيكية على أساس موجي. لقد كان أهم ما أفضت إليه معادلة شرودنجر هو مفهوم المؤثر والقيمة المميزة ذلك لأن معادلة شرودنجر صممت بالأساس لتكون معادلة للقيمة المميزة وأهم المؤثرات ذات العلاقة بمعادلة شرودنجر مؤثر كمية الحركة و مؤثر الطاقة. ميكانيكا المصفوفات ركزت علي مبدأ التكميم للكميات الفيزيائية المختلفة للجسيمات بينما ميكانيكا الموجة تصف الجسيم كموجة جسيم أو الموجات المصاحبة للجسيم.في الحقيقة أصبح من الواضح وبسرعة كبيرة أن الصياغتين عبارة عن مفهومين لنظرية أساسية واحدة تعرف اليوم باسم ميكانيكا الكم وهكذا اتضح أنهما صيغ رياضية مختلفة لنفس النظرية الفيزيائية التي نعرفها اليوم. [14, 13, 10]

معادلة الموجة للمجال الكهرومغناطيسي.

النهج المتبع لاشتقاق معادلة شرودنجر يبدأ من معادلات ماكسويل في الفراغ التي تعرف كالتالي:

$$(\text{i})\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \quad (\text{ii})\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(\text{iii})\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$(\text{iv})\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (1)$$

حيث أن $\vec{E}$المجال الكهربائي، $\vec{B}$ المجال المغناطيسي، μ_0 النفاذية المغناطيسية في الفراغ و ε_0 السماحية الكهربائية والعلاقة بينهما هي: $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ [15,2]

بإجراء الالتفاف لـ (ii) في المعادلة(1) فتصبح علي النحو الأتي:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

الطرف الايسر من المعادلة أعلاه تمثله المتطابقة الاتجاهية الآتية:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2 E$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

حيث إن $(\vec{\nabla}.\vec{E}) = 0$ نجد إن

$$-\nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

بالتعويض عن قيمة $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ من (iv) الممثلة في المعادلة (1) عليه يكون:

$$\nabla^2 E = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (2)$$

المعادلة (2) هى معادلة الموجة للمجال ($\vec{E}$) والتي تحكم الموجات الكهرومغناطيسية وفي بعد واحد تصبح كالأتي:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

حيث $\vec{E}$ متجه المجال الكهربائي، c سرعة الضوء لموجة تنتشر في الاتجاه x

[8].

حل المعادلة (3) هو حل الموجة المستوية والتي تمثل كالآتي:

$$E(x,t) = E_{\circ}e^{i(Kx-\omega t)} \quad (4)$$

المعادلة (4) دالة مركبة تحوي وصفا موجيا لأنها تحوي متجه الموجة K والتردد الزاوي ω و $E_{\circ}$ تمثل سعة المجال الكهربائي.

يستفاد من الدالة الموجية للموجة الكهرومغناطيسية باعتبار أن الفوتون يمثل الجانب المادي للموجة والتي نحصل عليها من حل المعادلة التفاضلية الموجية للفوتون.

عند أخذ الاشتقاق الجزئي الثاني للمعادلة (4) بالنسبة لـ x و t يكون

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -K^2 E_{\circ}e^{i(Kx-\omega t)} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_{\circ}e^{i(Kx-\omega t)} \quad (6)$$

بتعويض المعادلتين (5)(6) في المعادلة (3) يكون

$$\left(-K^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{\circ}\, e^{i(Kx-\omega t)} = 0 \quad (7)$$

بحل متجه الموجه K نحصل علي علاقة تشتت الضوء وهي:

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad , \quad K = \frac{\omega}{c} \quad (8a)$$

وطبقاً لفرضية اينشتاين يمكن تصور المجال الكهرومغناطيسي كجملة من الجسيمات (الفوتونات) كتلة سكونها معدومة وطاقتها تتحدد بالشكل التالي:

$$E = h\nu = 2\pi\nu\hbar \quad (8b)$$

h ثابت بلانك و ħ تعرف بـ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ و $\omega = 2\pi\nu$

$$E = \hbar\omega \quad (8c)$$

متجه الموجه K يمكن التعبير عنه باستخدام علاقة دي برولي مع استخدام العلاقة $c = \nu\lambda$ [14]

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{(c/\nu)} = \frac{2\pi\nu\hbar}{c} = \hbar K \quad (8d)$$

وبتعويض $(8c)$ و $(8d)$ في المعادلة (4) نحصل على دالة موجية تحوي في طياتها وصفا ماديا وهو ما نريده هنا بتمثيل دالة موجية تعبر عن حركة جسيم مادي. وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (4) فتعطي العلاقة الآتية:

$$E(x,t) = E_{\circ}\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (9)$$

العلاقة (9) معادلة موجة تعطي وصفا ماديا للفوتون ، وبما أن الفوتون يمثل الشكل المادي من الخاصية الازدواجية موجة- جسيم وفق فرضية دي برولي ،عليه يمكن اعتبار العلاقة (2) معادلة تفاضلية تعطي الوصف المزدوج للجسيم المادي بعد استبدال سرعة الضوء بالسرعات المعممة للجسيم المادي والتي لايمكن لسرعتها أن تصل لسرعة الضوء (نظرية اينشتاين) وبالتالي يمكن ببعض المعالجات الرياضية البسيطة الحصول على معادلة شرودنجر بالمفهوم اللانسبوي (سرعة الجسيمات اقل من سرعة الضوء).

مؤثرات الطاقة وكمية الحركة.

من المعادلة (9) نحصل على مؤثرات الطاقة وكمية الحركة من خلال التفاضل الجزئي الأول بالنسبة لـ x و t على التوالي.

أولاً بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{ip}{h} E_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{ip}{h}\vec{E} \quad (10b)$$

من المعادلة (10) مؤثر كمية الحركة يمكن أن يعبر عنه كالتالي:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad (11)$$

الصيغة العامة للمعادلة (11) في حالة ثلاثة أبعاد تكون:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (12)$$

ثانياً بالنسبة لـ t:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{iE}{h} E_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (13a)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{iE}{h}\vec{E} \quad (13b)$$

من المعادلة (13) نحصل على مؤثر الطاقة والذي يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$\hat{E} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} \quad (14)$$

بمفاضلة المعادلتين $(13a, 10a)$ مرتين بالنسبة لـ x و t

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} E_{\circ}\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2} E_{\circ} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (16)$$

بتعويض المعادلتين (15) و (16) في المعادلة (3) يكون:

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left(p^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) E_{\circ}\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} = 0 \quad (17)$$

من المعادلة(17) يتم الحصول على تعبير الطاقة الكلية النسبية لجسيم كتلته السكونية صفر كالآتي:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 \quad (18a)$$

عليه فانه من العلاقة (18a) وحسب النظرية النسبية فإن طاقة الفوتون يمكن كتابتها كالتالي[16]

$$E^2 = p^2c^2 \quad (18b)$$

الكتلة النسبية لجسيم كتلته السكونية $m_{\circ}$ تعطي بـ

$$m = \frac{m_{\circ}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18c)$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة الآتية

$$m^2 = \frac{m^2_{\circ}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (18d)$$

بضرب العلاقة $(18d)$ بـ $c^4\,(1 - \frac{v^2}{c^2})$.

$$m^2\, c^4\, (1 - \frac{v^2}{c^2}) = m_{\circ}^2\, c^4$$

$$m^2\, c^2 (c^2 - v^2) = m_{\circ}^2 c^4$$

$$m^2\, c^4 - p^2c^2 = m_{\circ}^2 c^4 \quad (19)$$

وبالتالي فإنه للموجة الكهرومغناطيسية وباعتبار $E = mc^2$ عليه فان المعادلة (18b) تأخذ الشكل الآتي

$$E^2 = p^2c^2 + m_{\circ}^2\, c^4 \quad (20)$$

تشير المعادلة (18b) إلى الطاقة في حالة الاعتبارات اللانسبية ومع ذلك عند اخذ التأثيرات النسبية في الاعتبار يعدل التعبير نفسه المعادلة (18b) إلى المعادلة (20) .إذا تم اعتبار أن $m = m_o$ لغرض السهولة في التعامل. عليه فانه من المعادلة (20) نحصل على

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2 \quad (21)$$

الدالة الموجية.

قام شرودنجر بفرض أن حركة الجسيم مصحوبة بحزمة موجية لها نفس

سرعة الجسيم، وان الطول الموجي المتوسط للموجات التي تكوِن هذه الحزمة يعطى بمعادلة دي برولي، وافترض أن هذه الموجة تصفها دالة موجية بدلالة موقع الجسيم والزمن[18]، وبما أننا لن نتعامل مع أي مجال كهربائي فإن تعبير الطاقة في المعادلة (9) يمكن أن يحل محله الدالة الموجية Ψ والتي تكون ممثلة بـ

$$\Psi_{(x,t)} = \Psi_o e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \qquad (22)$$

بإدراج المعادلتين (21) و(22) في المعالة (17) مع أستخدام المعادلة (18b) نحصل على

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left(p^2-\frac{E^2}{c^2}+m^2c^2\right)\Psi_o.\ e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0 \quad (23)$$

بتعويض المعادلتين (11) و(14) في المعادلة (23) نحصل على

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+m^2c^2\right)\Psi_o.\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+m^2c^2\right)\Psi_o.\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi_o.\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0 \quad (24)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (24) فان هذا يعطينا معادلة كلاين –جوردن للجسيمات الحرة

$$\nabla^2\Psi-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (25)$$

تمثل المعادلة (25) معادلة كلاين –جوردون وهي معادلة نسبية بينما معادلة شرودنجر تمثل الحالة اللانسبية. وهي تشبه معادلة ماكسويل للمجال الكهرومغناطيسي لو تغاضينا عن الحد الأخير من الطرف الأيسر للمعادلة (25). بمعنى لو كانت $m = 0$ وتعتبر هذه المعادلة حلقة الاتصال بين نظرية المجال الكلاسيكية وميكانيكا الكم .

ولتحقيق معادلة شرودنجر يجب وضع الفرضيات اللازمة لتأسيس معادلة غير نسبية والخطوة الأولى لإجراء ذلك هي تقريب المعادلة (21) على النحو التالي

$$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{m^2c^4\left(1+\frac{p^2}{m^2c^2}\right)}$$

$$E=mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}$$

$$E=mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)$$

$$E=mc^2+\frac{p^2}{2m}=mc^2+\frac{(mv)^2}{2m}=mc^2+T \qquad (26)$$

يعرف المصطلح الأخير T في المعادلة (26) بطاقة الحركة الكلاسيكية [16,5] .

نحتاج من المعادلة (26) قيمة الطاقة الكلية E وكمية الحركة p للجسم المادي الموصوف بفرضية دي برولي ، وهذه ، المعلومات من المفترض أن نجدها بالدالة الموجية التي تصف الجسيم والتي أعطيت بالمعادلة (9).

بتعويض المعادلة(26) التي تمثل الطاقة الكلية في المعادلة(22)التي تؤدي إلى

$$\Psi(x,t) = \Psi_\circ.\, e^{\frac{i}{\hbar}[px-(mc^2+T)\,t]}$$

$$\Psi(x,t)=\Psi_\circ e^{\frac{i}{\hbar}[px-mc^2t+Tt]})$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_\circ.\, e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Tt)} \qquad (27)$$

حيث افتُرض أن سرعة الجسيم أصغر بكثير من سرعة الضوء بحيث أن $mv \ll mc$ مما يعني ان $m^2c^2 \gg p^2$ أي أن الحد الأول من المعادلة (27) $e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}$ مرتبط بسرعة الضوءc بينما التعبير الاخير $e^{(\frac{iTt}{\hbar})}$ مرتبط بسرعة الجسيم وبما أن سرعة الجسيم لا يمكن مطلقا أن تكون اكبر من سرعة الضوء عليه يكون من الواضح أن الحد الأول سيتذبذب أسرع من الحد الأخير وبالتالي يمكن الاستفادة من ذلك بان تكتب المعادلة(27) علي النحو الآتي:

$$\Psi(x,t)=\phi\ e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}} \qquad (28)$$

$$\phi\ =\Psi_\circ\,.\,e^{\frac{i}{\hbar}(px-Tt)}$$

حيث ϕ دالة موجية لا نسبية ويجب أن تحقق شروط الدالة المعيارية.

وبمفاضلة المعادلة (28) مرتين بالنسبة لـ t . ينتج الآتي:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\left(-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\phi\ -\frac{2i}{\hbar}mc^{2e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

يجب أن نضع في اعتبارنا أن الحد الأخير مع المشتق الجزئي الثاني صغير جدًا لأنه لا يوجد مصطلح c^2 يحمل ترتيب المقدار ، وبالتالي بالتقريب يتم الحصول على المشتق الثاني الفعلي علي النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\left(-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\phi\ -\frac{2i}{\hbar}mc^{2e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (29)$$

بتعويض المعادلة (29) في المعادلة (24)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left[-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}-\frac{2i}{\hbar}mc^2e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial}{\partial t}\right]-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi.\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0 \quad (30)$$

بتعويض المعادلة (28) في المعادلة (30)

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left[-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}-\frac{2i}{\hbar}mc^2e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial}{\partial t}\right]-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\phi\ e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}.\, e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}=0$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left[-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}-\frac{2i}{\hbar}mc^2e^{\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial}{\partial t}\right]-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\phi\ e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}}=0 \quad (31)$$

الحد الأول الذي بين الأقواس كبير والحد الأخير صغير ، نبقى على الحدود الكبيرة ونتجاهل الحدود الصغيرة

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{2i}{\hbar}m\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-\frac{2i}{\hbar}m\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{2i}{\hbar^2}m\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (32)$$

المعادلة (32)هي معادلة شرودنجر الزمنية (TDSE) في بعد واحد بدون حد طاقة الوضع والتي يمكن كتابتها في ثلاثة أبعاد على النحو الآتي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi\ =i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (33)$$

حيث المؤثر اللابلاسي $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z}$

الطرف الأيسر من المعادلة(33) يصف طاقة الحركة للدالة الموجية. في اشتقاقنا ، افترضنا أن طاقة الوضع تساوي صفر وأن طاقة الحركة فقط تم أخذها في الاعتبار وبالتالي ، فإن معادلة شرودنجر الكاملة في ثلاثة أبعاد مع حد طاقة الوضع هي كالآتي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\phi = i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (34)$$

المناقشة.

المعادلات (34,33,32) تمثل معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن، ، وهذه المعادلة لا تستخدم للجسيمات المتحركة بسرعات نسبية (أي سرعات تقترب من سرعة الضوء). ومن وجهة نظر الرياضيات فان معادلة شرودنجر هي عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية وحلها دالة مركبة في t ، x حيث انها تشتمل على $i = \sqrt{-1}$. ومن وجهة نظر الفيزياء فهي معادلة مشابهة لتلك المعادلات التي تظهر في الفيزياء الكلاسيكية. ولكن Ψ ليس لها وجود فيزيائي بنفس الاحساس مثل موجات الماء. يمكن اعتبار Ψ كجهاز حسابي يمكن استخدامه لتحقيق مفاهيم فيزيائية.الدالة الموجية Ψ تكون على وجه العموم دالة مركبة (أي جزء منها حقيقي وجزء تخيلي) ولكل دالة مركبة هناك دالة موجية اخرى تسمى بالدالة المرافقة Ψ^* . وبصفة عامة فان الدالة الموجية في حد ذاتها ليس لها معنى طبيعي، ولكن بمعرفة شكل الدالة Ψ عن طريق معادلة شرودنجر يمكننا الحصول على وصف كامل للنظام لذلك فإننا نعرف احتمال وجود جسيم في وحدة الحجوم على انه $|\Psi|^2$ أو $\Psi\Psi^*$. كما نعرف احتمال وجود جسيم في حجم مقداره dτ هو $\Psi^*\Psi\, d\tau$ وعلى ذلك فان احتمال وجود الجسيم في الحجم تحت الدراسة (وليكن الفراغ كله) يكون مساويا للواحد صحيح كما في المعادلة التالية اذا تحققت هذه العلاقة فإننا نقول أن الدالة الموجية دالة معيارية .

$$\int_{\text{allspace}} \Psi^*\,\Psi\; d\tau = 1$$

وبناء على ماتقدم فان الدالة الموجية Ψ التي تحقق معادلة شرودنجر الموجية لابد وان تحقق شروطا محددة (شروط الحدود) وهي :

- أن تكون الدالة أحاديّة القيمة، بمعنى أنّه لكلّ قيمة محدّدة من x هنالك قيمة واحدة فقط ψ، أعطى العالم ماكس بورن مربّع الدالة الموجيّة (ψ^2) أو حاصل ضرب الدالة بقرينتها إنْ كانت مركّبة ($\psi\psi^*$) معنىً فيزيائياً هو احتمالية تواجد الجسيم الموصوف بهذه الدالة في نقطة مكانيّة محدّدة ونقطة زمانيّة محدّدة إذا لم تكن الحالة الموجود فيها ذلك الجسيم مستقرّة.
- يجب أن تكون الدالة الموجية ومشتقتها متّصلة ، فهذا ممّا يضمن قابليّتها للاشتقاق وهو ما نحتاجه في معادلة شرودنجر. كما أنّ كون الدالة غير متّصلة يؤدّي إلى كون احتمال تواجد الجسيم في نقطة عدم الاتصال غير معرّف.
- يجب أن يكون لتكامل مربع الدالة الموجية قيمة معرّفة وليس في ما لا نهاية كما أنّ الدالة نفسها يجب أن تكون معرّفة في كلّ نقطة ولا يجوز أن تكون في مالا نهاية وإلاّ كان احتمال تواجد الجسيم في تلك النقطة مالا نهاية وهو أمر غير مقبول فيزيائيّا.

وإذا لاحظنا أن الموجه المستوية والتي توصف بالعلاقة:

$\Psi = Ae^{-i2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v\lambda}\right)}$، فسنحصل بالمقارنة على المعادلة $(8d)$ ، ومنه نحصل من اجل الحركة الأحادية البعد،على طول موجة دي برولي، استبدال متجه شدة المجال الكهربائي E بالدالة الموجية Ψ منطقي بقدر ما تكون كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية المرتبطة بعدد الفوتونات متناسبة مع E^2 $n \propto E^2$ وبما أن $E\alpha|\Psi^2|$ وعليه فإن $n\alpha|\Psi^2|$ أي أن $E \to \Psi$ مع ملاحظة أن E^2 لاتحدد الموضع التام للفوتون عند لحظة معينه، ولكنها تحدد احتمال تواجد الفوتون في فترة مكانية معينة عند لحظة معينة.ولذلك ، ووفقا لماكس بورن فإن: Ψ^2 لا تحدد الموضع التام للجسيم عند لحظة معينة، ولكن تعطى احتمال تواجد الجسيم في فترة مكانية معينة عند لحظة معينة[19,18,17].

الاستنتاج.

بينت هذه الدراسة أن استخدام مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية والمتمثل في معادلة انتشار الموجة للمجال الكهرومغناطيسي وعلاقة الطاقة-كمية الحركة لاينشتاين يعتبر مدخلاً سهلاً ولا يعتريه التعقيد الذي قد يواجهه الدارس المبتدئ لميكانيكا الكم في كثير من الكتب والمراجع. فاشتقاق معادلة شرودنجر الزمنية من معادلة الموجة للمجال الكهربي لماكسويل تبين امكانية طبيعة اتحاد الموجة والجسيم للموجات الكهرومغناطيسية وأيضاً يبين الارتباط بين معادلات ماكسويل والنسبية الخاصة والمعادلات الكمية، نجد أن القيم القابلة للقياس للطاقة وكمية الحركة يمكن أن يتم التعبير عنها بصيغ تفاضلية جزئية تسمى المؤثرات، بالتالي فان معادلة شرودنجر يمكن الحصول عليها باستخدام مؤثرات الطاقة وكمية الحركة للدالة الموجية.

المراجع.

[1]- Hand A. F. J. Levi, 2006. Applied Quantum Mechanics. Second Edition. Cambridge University Press.p: 57-79.
[2]- Daniel Fleisch,2008. A Student's Guide to Maxwell's Equations. Cambridge University Press.p: 112-124.
[3]- Georgios Tsaparlis, .2001.Towards A meaningful Introduction to the Schrodinger Equation through Historical and Heuristic Approaches .Research and practice in Europe. Vol. 2(3): 203-213.

[4]- Mohammed Ismail Adam, Mubarak Dirar Abd Allah,2015, Derivation of Schrodinger and Einstein Energy Equations from Maxwell's Electric Wave Equation, IOSR Journal of Applied Physics (IOSR-JAP) , Volume 7(2) Ver. II : 82-87.
[5]- Ward, 2008, How to Derive the Schrodinger Equation, Am.J.ph.
[6]- Nilesh P Barde, Sandeep D. Patil, Pravin M. Kokne, Pranav P. & Bardapurkar (2015) Deriving Time Dependent Schrodinger Equation from wave Mechanics, Schrodinger Time Independent Equation, Classical and Hamilton-Jacobi Equations. Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies. p: 31-48.
[7]- Pranab Rudra Sarma, 2011, Direct Derivation of Schrodinger Equation from Hamilton-Jacobi Equation using Uncertainty Principle, Rom. Journ. Phys., Vol. 56(9–10):1053–1056, Bucharest.
[8]- Hye Jung Kang,2018, A New Approach for Introducing Schrödinger's Equation Using Maxwell's Equations, Quantum Mechanics, and Special Relativity, American Journal of Educational Research, Vol. 6(7): 963-966.
[9]- J.H. Field.2004 "Relationship of quantum mechanics to classical electromagnetism and classical relativistic mechanics," Eur. J. Phys. 25: 385-397.
[10]- الجابري محمد، 2002 مدخل إلي فلسفة العلوم، الطبعة الخامسة، مركز دراسات الوحدة العربية- بيروت. ص 365-374.
[11]- Shivam Prabhakaran, 2009. Quantum Mechanics. Book Enclave Jaipur. India. p: 17-24.
[12]- Zettili, Nouredine., 2009. Quantum Mechanics: concepts and applications. A John Wiley and Sons, Ltd., Publication. p: 1-4.
[13]- Daniel R. Bes, .2012 Quantum Mechanics, A Modern and Concise Introductory Course. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. p: 259-267.
[14]- M A de Gosson,.2001.The Principles of Newtonian and Quantum Mechanics..The Need for Planck's constant, h. Imperial College Press. p: 13-17.

[15]- Griffiths, D. J., 2013 Introduction to Electrodynamics, 4th ed, Pearson. p: 393-394 .

[16]- Helliwell, T. M., 2010. Special Relativity, University Science Books. p:146-150.

[17]- ر، ديكة. و.ج، ويتكه. ترجمة آحو، يوسف 1993م، المدخل إلى ميكانيكا الكم. المركز العربي للتعريف والترجمة والتأليف والنشر- دمشق. ص 55-59.

[18]- نبيل البكري، صلاح البكري2005، ميكانيكا الكم ، الطبعة الأولى، دار الفكر العربي ، القاهرة ص 45- 55.

[19]- Giancoli, D. C., 2009. Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics, 4th ed, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River , p: 1018-1019.