SEBHA UNIVERSITY JOURNAL OF PURE & APPLIED SCIENCES VOL.25 NO. 2 2026
DOI: 10.51984/4TDY4D20

مجلة جامعة سبها للعلوم البحتة والتطبيقية
Sebha University Journal of Pure & Applied Sciences

Journal homepage: http://www.sebhau.edu.ly/journal/jopas

تقييم مقارن لمنهجيات حساب المحاثة المتبادلة للملفات الحلزونية الدائرية في أنظمة نقل الطاقة اللاسلكية

رقية الباهي[a*] وحامد عبد الحق[b]

[a]قسم الهندسة الكهربائية والإلكترونية، كلية الهندسة، جامعة سبها، سبها، ليبيا.
[b]قسم الهندسة الكهربائية والإلكترونية، كلية العلوم التقنية، سبها، ليبيا.

الملخص

يشهد مجال نقل الطاقة اللاسلكية (WPT) تطورا متسارعا كأحد الحلول الواعدة في هندسة الطاقة الحديثة، حيث يركز الباحثون جهودهم في تحسين كفاءة الاقتران الحثي وتقليل عوامل الفقد. ولما كانت دقة النمذجة الرياضية للمحاثة المتبادلة تمثل أساسا جوهريا في تصميم هذه الأنظمة، تهدف هذه الورقة إلى تقييم ومقارنة ثلاث منهجيات لحساب المحاثة المتبادلة للملفات الحلزونية الدائرية متطابقة المحور، للموازنة بين الدقة الحسابية والكفاءة الزمنية. شملت الدراسة: طريقة تكامل نيومان (Neumann Integral)، وطريقة التكاملات الإهليليجية (Elliptic Integrals)، وطريقة متسلسلة القوى (Power Series). تم اعتماد نتائج طريقة العناصر المنتهية (D³-FEM) التي تم التحقق من صحتها عمليا في الأدبيات المرجعية كمعيار مرجعي مثبت عمليا للتحقق من النتائج في النطاق القريب، بينما تم توسيع الدراسة لتشمل المسافات البعيدة لتحليل سلوك التقارب. أظهرت النتائج أن طريقتي "تكامل نيومان" و"التكاملات الإهليليجية" حققتا تطابقا عاليا مع النتائج المرجعية، بمتوسط خطأ نسبي لا يتجاوز 2%، مع تفوق واضح لطريقة التكامل الإهليليجي في سرعة التنفيذ. في المقابل، كشفت النتائج عن قصور في دقة طريقة "متسلسلة القوى" عند المسافات القريبة (متوسط الخطأ < 33%)، إلا أن أداءها شهد تحسنا ملحوظا في المجال البعيد (مسافة << 30 ملم) مقتربة من الحل الدقيق. تخلص الدراسة إلى أن طريقة التكاملات الإهليليجية تمثل الخيار الهندسي الأمثل للتصميم العام لهذا النوع من الملفات، بينما يوصى باستخدام متسلسلة القوى للتقديرات السريعة في المسافات المتباعدة.

الكلمات المفتاحية:

التكاملات الإهليليجية.
حساب المحاثة المتبادلة.
صيغة نيومان.
طريقة العناصر المنتهية.
الملفات الحلزونية المستوية.
نقل الطاقة اللاسلكية.

Comparative Evaluation of Mutual Inductance Calculation Methodologies for Circular Spiral Coils in Wireless Power Transfer Systems

Ruqayah Albahi[a*], Hamed Abd-Alhak[b]

[a]Department of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Sebha University, Sebha, Libya.
[b]Department of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Technical Sciences, Sebha, Libya.

A B S T R A C T

Wireless power transfer (WPT) is rapidly evolving as a promising solution in modern power engineering. As accurate mathematical modeling of mutual inductance constitutes a corner stone in designing these systems, this paper aims to evaluate and compare three methodologies for calculating the mutual inductance of perfectly aligned circular spiral coils: The Neumann Integral, the Elliptic Integrals, and the Power Series methods. The experimentally validated results of the finite element method (3D-FEM) were adopted in the reference literature as a proven experimental benchmark. in the near-field region, while the study was extended to the far-field to analyze convergence behavior. Results demonstrated that both Neumann and Elliptic Integral methods achieved high agreement with reference values (average error < 2%), with the Elliptic method exhibiting superior computational speed. Conversely, the Power Series method showed significant deviation in the near-field (average error >33%) but demonstrated dramatic accuracy improvement in the far field (distance >> 30 mm). The study concludes that the Elliptic Integrals method

Keywords:

Elliptic Integrals.
Finite Element Method (FEM).
Mutual Inductance Calculation.
Neumann Formula.
Planer Spiral Coils.
Wireless Power Transfer (WPT).

*Corresponding author.
E-mail addresses: ruqi.alabid@sebhau.edu.ly, (H. Abd-Alhak) hmdhksd54@gmail.com.
Article History : Received 26 January 26 - Received in revised form 26 July 26 - Accepted 06 August 26

represents the optimal engineering choice for general design of this coil type, while the Power Series is recommended for rapid estimations at larger separation distances.

1. المقدمة

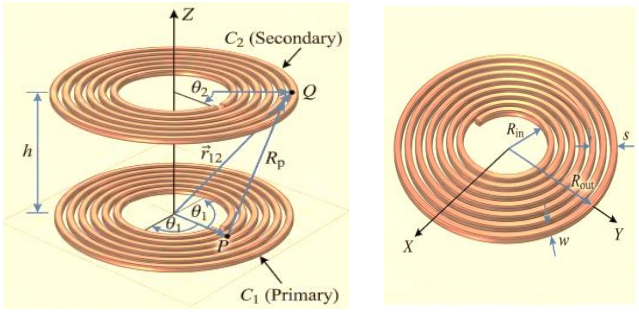
شهدت تكنولوجيا نقل الطاقة لا سلكيا (WPT) في العقود الأخيرة تطوراً ملموساً، متجاوزة أُطر مفهومها النظري لتصبح عصبا حيويا في تطبيقات الطاقة الحديثة، بدءا من شحن المركبات الكهربائية والأجهزة المحمولة، وصولا إلى تزويد الإلكترونيات الاستهلاكية بالطاقة والغرسات الطبية الحيوية والأنظمة ذاتية التحكم [1]،[2]. حيث يرتكز نجاح هذه الأنظمة بشكل جوهري على كفاءة الاقتران الحثي المغناطيسي، وتمثل "المحاثة المتبادلة (Mutual Inductance) " المعامل الفيزيائي الحاسم الذي يحدد قدرة النظام على نقل الطاقة، وموائمة المعاوقة، وكفاءة التشغيل الكلية [3]- [5]. ومن بين التكوينات الهندسية المختلفة للملفات، تفضل الملفات الدائرية الحلزونية المستوية بشكل خاص نظرا لصغر حجمها وسهولة تصنيعها وقدرتها العالية على الاقتران في ظل ظروف محاذاة مثالية [1]،[6]. تاريخيا استندت الحسابات الكهرومغناطيسية للمحاثة المتبادلة إلى صيغ معيارية مرجعية، وتعد صيغة نيومان (Neumann Formula) الحل الأكثر دقة وعمومية، حيث تعتمد على التكامل المزدوج لمتجه الجهد المغناطيسي [7] - [9]. بيد أن التطبيق العملي لهذه الصيغة يواجه تحديا يتمثل في التعقيد الحسابي العالي. وفي محاولة للتبسيط قدم (Grover) جداول وصيغا تقريبية [7]، [10]، إلا أنها تظل قاصرة عند التعامل مع الملفات متعددة اللفات. وفي سياق البحث عن حلول أكثر كفاءة، قدم Babic and Akyel [10]- [12] إسهاما بارزا لتحسين نماذج الحث المتبادل، من خلال تطوير صيغة تحليلية عامة لحساب المحاثة المتبادلة بين الملفات الدائرية في أوضاع مختلفة، سواء كانت متعامدة أو ذات محاذاة عشوائية. وقد اعتمد هذا النموذج على دمج التكاملات الإهليليجية (Elleptic Integrals) في صيغة Neumann التقليدية، مما أتاح تحسين لدقة الحسابية بشكل ملحوظ مقارنة بالطرق الكلاسيكية، مع تعزيز قدرته على التعامل مع الحالات غير المثالية التي يصعب معالجتها باستخدام النماذج التقليدية. ويعد هذا النموذج مرجعا أساسيا في الدراسات اللاحقة المتعلقة بتحليل وقياس الحث المتبادل في التطبيقات الهندسية المتقدمة. وإلى جانب ذلك، تبرز طرق متسلسلة القوى (Power Series) كنهج تقريبي يقدم سرعة حسابية فائقة استنادا إلى نظرية توسيع متعدد الأقطاب المغناطيسية (Magnetic Multipoles)[13]، هذه الصيغة مشتقة أصلا من توسيع Taylor للحلول التامة المعتمدة على التكاملات الإهليليجية، وقد وثقها Grover [7] وKalantarov and Zeitlin [14] كحل فعال للملفات المتباعدة. يمثل الحد الأول في هذه المتسلسلة تفاعل ثنائي القطب، وتستخدم الحدود اللاحقة كتصحيحات للرتب العليا، مما يجعلها دقيقة في "المجال البعيد (Far-field)" حيث تكون المسافة كبيرة مقارنة بأبعاد الملف. ورغم ذلك، تبقى التساؤلات مطروحة بدقة حول مدى دقتها في "المجال القريب (Near-field)" حيث تفشل نظرية ثنائي القطب النقطي، مما يستدعي المزيد من التحليل النقدي لتحديد نطاق صلاحيتها التطبيقية. من ناحية أخرى تستخدم الطرق العددية مثل طريقة العناصر المنتهية (FEM) كمعيار مرجعي مُثبت فيزيائيًا للتحقق كما في عمل Hussain and Woo [1]، ولكن تكلفتها الزمنية واعتمادها على البرامج التجارية تجعلها غير عملية للتصميم التكراري السريع، خصوصا عند التعامل مع النماذج ثلاثية الأبعاد التي تتضمن أسلاك Litz أو قلب من ferrite [12]، [15]،[16]. انطلاقا من هذه الإشكاليات تهدف هذه الورقة إلى إجراء تقييم نقدي ومقارنة شاملة للمنهجيات الثلاث (نيومان، الإهليليجية، متسلسلة القوى) لتحديد المنهجية التي تحقق التوازن الأمثل بين الدقة والسرعة، مع توسيع نطاق الدراسة ليشمل تحليل الأداء في المسافات البعيدة.

2. النموذج النظري (Theoretical Model)

1.2. صيغة نيومان التكاملية (Neumann Formula)

تعد الصيغة الأساسية لحساب المحاثة المتبادلة M_i بين ملفين، وتشتق المحاثة المتبادلة بين ملفين حلزونيين دائريين مستويين عادة من صيغة نيومان التكاملية [8]،[17]، التي تقدم تعبيرا أساسيا للاقتران المتبادل بين سلكين يحملان تيارا ثابتا اعتمادا على التكامل الخطي المزدوج، حيث تشكل هذه المعادلة أساسا لنمذجة المحاثة المتبادلة في معظم الدراسات الكلاسيكية والحديثة، وتعتبر المرجع النظري الأدق، لكنها تتطلب زمنا حسابيا طويلا بسبب التكامل الثنائي. يوضح الشكل (1- أ) منظراً علويا لملف حلزوني دائري مستو (Archimedean spiral) يقع بالكامل في المستوى x-y، وحسب نظرية الحث المتبادل فإنه لأي ملفين ابتدائي وثانوي C_1 , C_2 على التوالي شكل (1- ب) الواقعان في مركز المستوى x-y يمكن حساب المحاثة المتبادلة M بينهما باستخدام صيغة نيومان التكاملية معادلة (1) [17].

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C1} \oint_{C2} \frac{\vec{dl}_1 \, \vec{dl}_2}{R} \qquad (1)$$



(1 – ب)

(1 – أ)

شكل 1: ملف حلزوني دائري مستوي

(1- أ) مسقط علوي لملف حلزوني دائري مستوي

(1 – ب) الحث المتبادل بين ملفين حلزونيين دائريين في مستوى x-y

لإيجاد قيمة M في المعادلة السابقة حيث μ_0 تعبر عن نفاذية الفراغ، تُحسب قيمة كلا من المتجهين dl_2 وdl_1 وكذلك مقدار المتجه $\vec{R}$ الذي يربط بين النقطتين Q،P الواقعتين على الملفين C_1 C_2 , وإحداثياتهما في نطاق الإحداثيات الإسطوانية على التوالي:

$$P(x_p, y_p, z_p) = (R_A \cos\theta_1, R_A \sin\theta_1, 0) \qquad (2)$$

$$Q(x_Q, y_Q, z_Q) = (R_B \cos\theta_2, R_B \sin\theta_2, h) \qquad (3)$$

من المعادلتين 2،3 بالإمكان إيجاد المسافة R بين النقطتين P, Q التي تعبر عن المتجه $\vec{R}$ بالمعادلة 4:

$$R = \sqrt{{R_A}^2 + {R_B}^2 - 2R_A R_B \cos(\theta_2 - \theta_1) + h^2} \qquad (4)$$

حيث h تمثل المسافة من المركز إلى المركز، R_A يمثل نصف قطر الملف الابتدائي C_1، R_B هو نصف قطر الملف الثانوي C_2، θ_1 هي زاوية ميل R_A

نسبة للمحور x للملف C_1، θ_2 هي زاوية ميل R_B نسبة للمحور x للملف C_2 [1]،[2]،[18].

dl_1 و dl_2 عناصر خطية يمكن تمثيلها حسب الإحداثيات الإسطوانية بالمعادلتين 6،5:

$$\overrightarrow{dl}_1 = R_A(-\sin\theta_1\, x^{\wedge} + \cos\theta_1\, y^{\wedge})\, d\theta_1 \quad (5)$$

$$\overrightarrow{dl}_2 = R_B(-\sin\theta_2\, x^{\wedge} + \cos\theta_2\, y^{\wedge})\, d\theta_2 \quad (6)$$

ومنهما فإن :

$$\overrightarrow{dl}_1.\overrightarrow{dl}_2 = R_A R_B \cos(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \quad (7)$$

بتعويض المعادلتين 7،4 في المعادلة (1) نحصل على صيغة معادلة نيومان التكاملية لحساب المحاثة المتبادلة معادلة (8).

$$M = \frac{\mu_0 R_A R_B}{4\pi} \int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi N} \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{R_A{}^2+R_B{}^2-2R_A R_B\cos(\theta_1-\theta_2)+h^2}} \quad (8)$$

2.2. طريقة التكاملات الإهليليجية (Elleptic Integrals Method)

من أجل تسهيل معالجة معادلة نيومان (8) الخاصة بحساب المحاثة المتبادلة، يمكن الاستفادة من خصائص التكاملات الإهليليجية (*Elliptic Integrals*). يستند هذا الإطار التحليلي إلى إعادة ترتيب الدالة تحت التكامل بما يسمح بالتعامل مع الملفات الحلزونية على أنها مؤلفة من عدد من الحلقات الدائرية متحدة المركز (*Circular Filments*) تتميز هذه الطريقة بالسرعة العالية والدقة الشديدة [15]،[19].

ولحساب المحاثة المتبادلة (M) بين ملفين مستويين، يفترض أن كل لفة في كل ملف تمثل حلقة دائرية منفصلة، بحيث تحسب المحاثة المتبادلة بين كل زوج من الحلقات المتناظرة في الملفين الأول والثاني (M_{ij}). وبعد تحديد قيمة المحاثة لكل زوج من الحلقات، تحسب المحاثة الكلية عبر جمع المساهمات الجزئية بين أزواج الحلقات باستخدام حل ماكسويل الدقيق، والذي يمكن التعبير عنه بالعلاقة: [15]،[20]،[21].

$$M = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} M_{ij} \quad (9)$$

حيث تمثل كل من (i) و (j) رقم اللفة في الملف الأول والملف الثاني على التوالي، وتشير (Mij) إلى قيمة المحاثة المتبادلة بين الحلقة الدائرية التقريبية رقم (i) في الملف $(C1)$ ذات نصف القطر (R_{Ai}) والحلقة الدائرية التقريبية (j) في الملف $(C2)$ ذات نصف القطر (R_{Bj}). ويتم حساب (Mij) باستخدام صيغة ماكسويل [9]، [19].

$$M_{ij} = \mu_0\sqrt{R_{Ai}R_{Bj}}\left[\left(\frac{2}{m}-m\right)k(m) - \frac{2}{m}E(m)\right] \quad (10)$$

حيث يعرف المتغير (m) وفق العلاقة التالية [7]:

$$m^2 = \frac{R_{Ai}R_{Bj}}{h^2+(R_{Ai}+R_{Bj})^2} \quad (11)$$

ويمثل كل من $k(m)$ و $E(m)$ التكاملين الإهليليجيين الكاملين من النوعين الأول والثاني على التوالي [9] ،[22]، [23].

$$k(m) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n} \quad (12)$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} \quad (13)$$

3.2. طريقة توسيع متسلسلة القوى (Power Series Approximation)

تعد طريقة توسيع متسلسلة القوى، والمعروفة بـ (Expansion in a power chain formula)، نهجا تقريبيا كلاسيكيا يهدف إلى تبسيط الحسابات المعقدة المرتبطة بالصيغ التحليلية للمحاثة المتبادلة. تعتبر هذه الطريقة في جوهرها توسيع تقريبي لحالة خاصة من طريقة Kalantarov and Zeitlin [14]، باستخدام توسيع متسلسلة تايلور الذي ينتج عنه تعبير جبري مباشر (غير تكاملي)، وتستخدم بشكل فعال لتقليل التعقيد الرياضي وتحسين كفاءة النمذجة عند التعامل مع الملفات متعددة اللفات. نظرا لصعوبة الحسابات المرتبطة بالتكاملات في صورتها المغلقة "المعادلة (1)"، يتم عادة تقريب قيمها بالاعتماد على أسلوب التوسع المتسلسلي. هذه الطريقة هي الأسرع حسابيا، ويصبح هذا التقريب فعالا بشكل خاص عندما تكون المسافة بين الملفين (h) أكبر بكثير من أنصاف أقطارهما $(h \gg R_1, R_2)$ [13]. بالتالي يمكن تقريب المعادلة (9) بالتحليل الجبري للحد التالي:

$$m^2 = \frac{4R_{Ai}R_{Bj}}{h^2}. \quad (14)$$

والتقريب باستخدام متسلسلة تايلور للحد $1 + \frac{(R_{Ai+}R_{Bj})^2}{h^2}$ فإن:

$$m^2 \approx \frac{4R_{Ai}R_{Bj}}{h^2}\left[1 - \frac{(R_{Ai}+R_{Bj})^2}{h^2} + \frac{(R_{Ai}+R_{Bj})^4}{h^4} - \frac{(R_{Ai}+R_{Bj})^6}{6} + \cdots\right] \quad (15)$$

بالتعويض في المعادلة (10) واستخدام التوسيعات في (12)،(13) نحصل على التبسيط التالي لمعادلة حساب المحاثة المتبادلة:

$$M_{ij} = \mu_0\pi\frac{R_{Ai}{}^2R_{Bj}{}^2}{2\,h^3}\left[1 + \frac{15}{8}\frac{R_{Ai}{}^2R_{Bj}{}^2}{h^4} + \frac{315}{128}\frac{R_{Ai}{}^4R_{Bj}{}^4}{h^8} + \frac{4725}{1024}\frac{R_{Ai}{}^6R_{Bj}{}^6}{h^{12}} + \cdots\right] \quad (16)$$

3. منهجية البحث وإعدادات المحاكاة (Methodology)

لتقييم أداء وكفاءة النماذج الرياضية المقترحة للدراسة، مع ملاحظة أن الحسابات أخذت باعتبار الملفات تعمل في الفراغ وذلك للتركيز على تقييم الكفاءة الرياضية للخوارزميات كما هو معمول به في المراجع [1]،[15]. تم تطوير خوارزميات حسابية وتنفيذها داخل بيئة MATLAB. انقسمت الدراسة المنهجية إلى ثلاثة مراحل:

1. **مرحلة التحقق (Validation Phase):** مقارنة النتائج التحليلية للطرق الثلاثة مع بيانات المحاكاة العددية (3D FEM) والتي تم التحقق من نتائجها عمليا في المرجع [1] من قبل الباحثين Hussain وWoo لنفس البيانات قيد الدراسة للمسافات القصيرة (10- 30 ملم).
2. **مرحلة التوسيع (Extension Phase):** توسيع نطاق المسافة المحورية h ليصل إلى (100 ملم) لتحليل سلوك متسلسلة القوى في المجال البعيد، مع اعتماد حل "نيومان " كمعيار دقيق في هذا النطاق لغياب بيانات FEM المرجعية للمسافات البعيدة.
3. **مرحلة حساب الزمن المستغرق (Elapsed Time):** تم مقارنة أداء النماذج الثلاثة لجميع تشكيلات الملفات، وحُسب الوقت المستغرق لتنفيذ العمليات الحسابية. تم تنفيذ جميع الحسابات للزمن عند مسافة 60 ملم حيث أبدت النماذج الثلاثة سلوكا متقاربا من حيث المحاثة المحسوبة.

لضمان نزاهة المقارنة، طبقت نفس الخصائص الهندسية للمرجع [1] على ثلاث تكوينات من حيث عدد اللفات حيث N_p تمثل عدد اللفات للملف الابتدائي، N_s عدد ملفات الملف الثانوي:

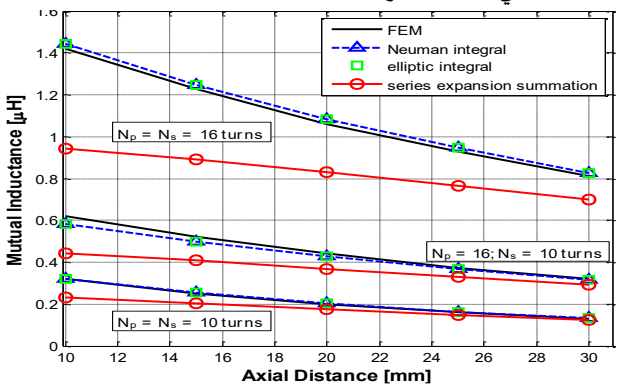
- ملفان متماثلان$(N_p = N_s = 16)$
- ملفان غير متماثلين$(N_p = 16, N_s = 10)$
- ملفان متماثلان $(N_p = N_s = 10)$

وكان نصف القطر الداخلي للملف ذو 10 لفات $(R_{Ai} = 10mm)$، والمسافة بين لفاته $(s = 4mm)$، ونصف القطر الخارجي $(R_o = 50mm)$. بينما أبعاد

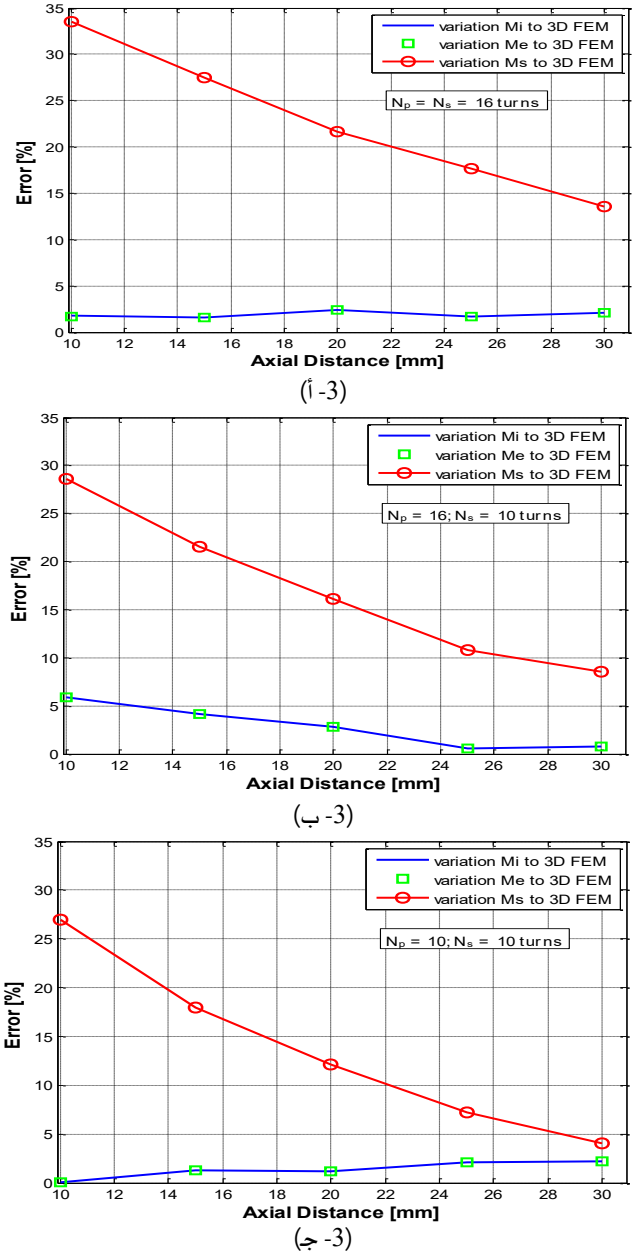
الملف ذو 16 لفة كانت على النحو التالي: نصف القطر الداخلي ($R_{Ai} = 10mm$)، والمسافة بين لفاته ($s = 4.68mm$)، ونصف القطر الخارجي ($R_o = 85mm$).

4. النتائج والمناقشة (Results and Discussion):

قدمت هذه الورقة تحليلا مقارنا شاملا لدقة وكفاءة ثلاث نماذج رياضية لحساب المحاثة المتبادلة (M) بين الملفات الحلزونية المسطحة مثالية المحاذاة تماماً (نيومان M_i، الإهليليجية M_e، متسلسلة القوى M_s)، مع التحقق من دقتها مقابل نموذج مرجعي دقيق ثلاثي الأبعاد (3D FEM) عبر ثلاثة سيناريوهات هندسية تغطي الاقتران المتماثل وغير المتماثل (16- 16،16- 10، 10- 10 لفة) للملفين الابتدائي و الثانوي، مما يشكل منهجية تحقق معيارية تهدف إلى ضمان موثوقية النماذج في نطاق واسع من التطبيقات في أبحاث نقل الطاقة اللاسلكية. أظهرت النتائج أن كلا من الطريقتين M_i،M_e حققتا تقاربا عاليا مع نتائج 3D FEM، وذلك ضمن كامل نطاق مسافات المجال القريب (10- 30 ملم) كما هو موضح في الشكل (2)، حيث سجل متوسط الخطأ النسبي قيمة 2% مقارنة بـ FEM في جميع نطاقات القياس لجميع التشكيلات قيد الدراسة شكل (3:أ،ب،ج) حيث بلغ الحد الأقصى للخطأ (2.23%، 5.88%، 2.35%) عبر ثلاثة سيناريوهات للملفات (10-10،10- 16، 16- 16 لفة) ، و يعزى هذا الثبات إلى الطبيعة التكاملية لهذه الطرق التي تحسب المحاثة المتبادلة عن طريق إجراء تكامل على طول مسار التيار الفعلي لكل لفة متجاهلة أي تقريب مكاني. هذه النتائج تؤكد موثوقية الطرق التحليلية المشتقة من مبادئ الكهرومغناطيسية الأساسية كأدوات نمذجة أساسية متوافقة مع ما هو موثق في عمل Maxwell [7] و Grover and Rosa[21]، وغيرهم [6]، ويجعلها معيارا لتقييم بقية الطرق. وعلى الرغم من الدقة المتطابقة لطريقتي M_i ، M_e يكمن الاختلاف الجوهري بينهما في الكفاءة الحسابية جدول (1) حيث سجلت طريقة M_i زمنا حسابيا (1.16 ثانية) مقارنة بـ (0.017 ثانية) لطريقة M_e لملف (16 - 16 لفة) الذي يستهلك زمنا حسابيا أكبر من باقي الحالات المدروسة نظرا لزيادة عدد اللفات كما موضح في شكل (4)، ويعلل هذا الزمن بتعقيد الحل العددي للتكامل المزدوج في طريقة M_i. وتجدر الإشار ة هنا إلى أن هذا الزمن يكون أقل من الزمن المستغرق عند استخدام طريقة العناصر المنتهية (3D FEM) للحالات قيد الدراسة كما ورد في المرجع [2]، هذا التفوق في الأداء يجعل M_e الخيار الأمثل هندسيا لتصميم أنظمة WPT التي تتطلب نمذجة دقيقة في الوقت الحقيقي (Real-Time). في المقابل للطرق التكاملية،



شكل 2: مقارنة نتائج حساب الحث المتبادل بين الطرق الثلاثة (M_i،M_e،M_s) مع FEM للملفات(16- 16،16- 10، 10- 10 لفة)، مسافة (10 - 30 ملم)



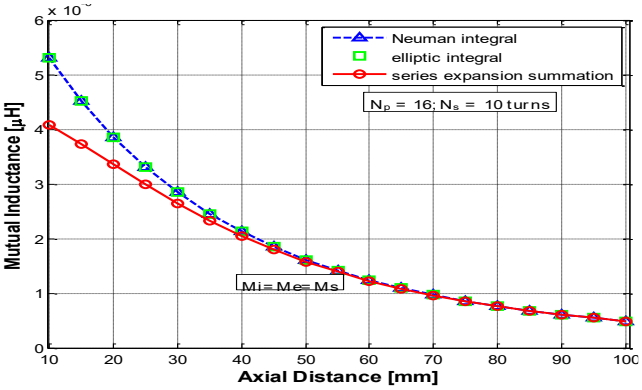
(3- أ)

(3- ب)

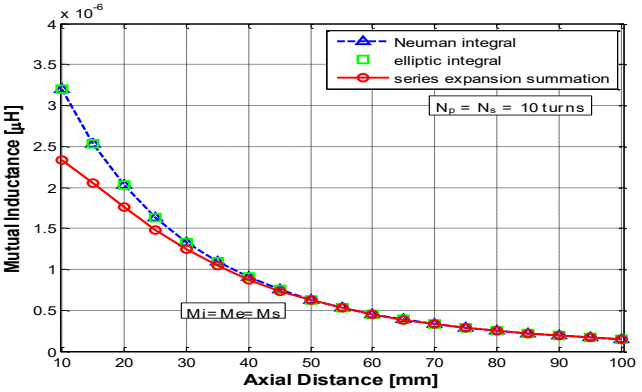
(3- ج)

شكل 3: حساب نسبة الخطأ بين الطرق الثلاثة (M_i،M_e،M_s) مع FEM
3- أ: 16-16 لفة ،3- ب:16-10 لفة، 3- ج: 10-10 لفة

أظهر نموذج متسلسلة القوى (M_s) سرعة فائقة مقارنة بالنموذجين الآخرين شكل (4)، حيث حقق زمنا حسابيا (0.0048ثانية) لأكبر نموذج (16 - 16 لفة) متفوقا على بقية الطرق جدول (1)، ويعزى هذا إلى أن طريقة M_s تعتمد على حسابات جبرية بسيطة. تأتي سرعة نموذج M_s على حساب دقة النموذج خصوصا في المجال القريب (10- 30 ملم) ويعلل هذا الفشل إلى الطبيعة الرياضية لـ M_s المشتقة من توسيع متعدد الأقطاب (Multipole Expansion)، يفترض هذا التوسيع أن الملف يمكن تقريبه إلى ثنائي قطب مغناطيسي مثالي، وهو تقريب صالح فقط عندما تكون المسافة الفاصل (h) أكبر بكثير من الأبعاد نصف القطرية الخارجية للملف (R_{out}) أي أن: ($h >> R$) [13] لذلك: عند المسافات القريبة يشترط أن تكون النسبة ($\frac{R}{h}$) كبيرة مما يؤدي إلى زيادة كبيرة في خطأ الاقتطاع (Truncation Error) في متسلسلة القوى معادلة (16) نتيجة لعدم انطباق الشرط، ويزداد هذا الخطأ بزيادة التعقيد الهندسي للملفات (عدد اللفات) حيث سجل ملف (16- 16 لفة) نسبة خطأ بلغت (33.5%) عند مسافة 10 ملم، بينما بلغت نسبة الخطأ في الملف الأصغر (26.9%) عند نفس المسافة.



شكل (5- ب)



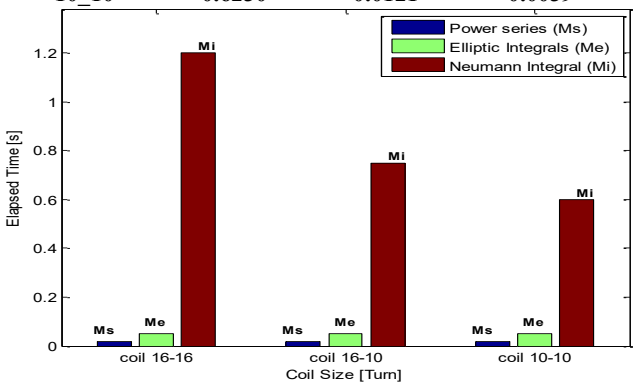
شكل (5- ج)

شكل (5): مقارنة المجال البعيد

5- أ: 16-16 لفة ،5- ب:16-10 لفة، 5- ج: 10-10 لفة

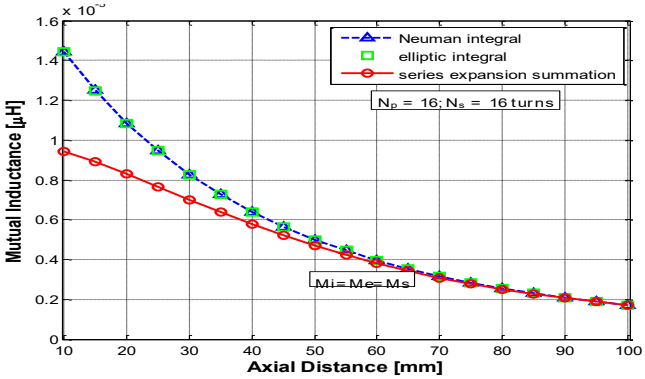
جدول 1: الزمن المستغرق لحساب المحاثة

turn/Model	time _Mi(s)	time_Me(s)	time _Ms(s)
16_16	**1.1647**	**0.0170**	**0.0048**
16_10	**0.7815**	**0.0139**	**0.0041**
10_10	**0.6230**	**0.0121**	**0.0039**



شكل4: مقارنة الزمن المستغرق لتنفيذ الحسابات لجميع الطرق

من جهة أخرى أظهرت اختبارات المجال البعيد (Rh >>) تحسنا ملحوظا في أداء نموذج M_s مع احتفاظ كلا من M_i , M_e بدقتهما الحسابية شكل (5: أ، ب، ج)، والأخذ بالاعتبار التغيرات الحادثة في قيم المحاثة مع زيادة عدد اللفات أو زيادة المسافة بين الملفين الابتدائي والثانوي كما ورد في [17]، [24] ، يفسر هذا التحسن في الإداء إلى أن زيادة المسافة (h) تخفض النسبة ($\frac{R}{h}$) بشكل كبير مما يؤدي إلى تقارب سريع للمتسلسلة الرياضية، حيث تصبح مساهمة الحدود المهملة ضئيلة جدا، ويصبح الاقتطاع مقبولا. في هذه المنطقة (المجال البعيد) يتلاشى أثر التعقيد الهندسي للملف، ويسلك الملف سلوك ثنائي قطب مغناطيسي مثالي. ولتحديد نقطة التحول والانتقال للمجال البعيد التي تحقق تقاربا ودقة لطريقة M_s مقارنة بـ M_i، M_e، 3D FEM بناء على شرط المجال البعيد h >> R مع الأخذ بالاعتبار خصائص الشكل الهندسي (R_{out})، من خلال النتائج تبين أن استخدام متسلسلة القوى يكون صالحا للتقريب عندما تكون النسبة بين المسافة ونصف قطر الملف تبعا للعلاقة (h ≥ 1.5 R) للحالة قيد الدراسة، حيث يتحقق شرط دقة طريقة متسلسلة القوى و ينخفض خطأ القطع إلى مستوى مقبول هندسياً، مما يسمح باعتماد النموذج المبسط دون الحاجة للنماذج الأكثر تعقيدا حسابيا. أما فيما يخص تأثير زيادة عدد اللفات على المحاثة المتبادلة فيظهر من الشكل (2) أن زيادة عدد اللفات للملفين الابتدائي والثانوي بطريقة متماثلة (نفس عدد اللفات) أعطى زيادة واضحة في قيمة المحاثة المتبادلة مع ثبات بقية المعاملات، بينما لم تعط زيادة عدد لفات الملف الابتدائي مقارنة بالثانوي نفس الأثر حيث تبين أن زيادة القطر الخارجي لملف الإرسال بالنسبة لملف الإستقبال أدى إلى تقليل المحاثة التبادلية الناتجة مما يعزز ما توصلت إليه الدراسات التالية [25]و[26].



شكل (5- أ)

5. الاستنتاجات والتوصيات (Conclusions and Recommendations):

قدمت هذه الورقة تقييما مقارنا شاملا لثلاث منهجيات لحساب المحاثة المتبادلة للملفات الحلزونية المسطحة. خلصت هذه الدراسة إلى أن طريقة التكاملات الإهليليجية تمثل الخيار الهندسي الأمثل لمعظم تطبيقات نقل الطاقة اللاسلكية، إذ تجمع بين دقة 3D FEM وسرعة التنفيذ اللازمة للنمذجة التكرارية في نطاق المجال القريب والبعيد. كما توصلت الدراسة إلى نتيجة هامة مفادها أن طريقة متسلسلة القوى، رغم عدم صلاحيتها للمسافات القريبة، تبدي تقاربا ممتازا وكفاءة عالية عند المسافات h ≥ (1.5 R) المجال البعيد، مما يرشحها كأداة سريعة للتقديرات الأولية في النطاقات المتباعدة. توصي الدراسة باعتماد طريقة التكاملات الإهليليجية (M_e) كمعيار للحساب لتصميم أنظمة شحن عالية الكفاءة (مثل شواحن المركبات الكهربائية) التي تعمل في المجال القريب، وحصر استخدام الصيغ التقريبية (M_s) في التقديرات الأولية للمسافات البعيدة. ختاماً توصي هذه الدراسة بتوسيع تطبيق هذه المقارنة مستقبلاً لتتجاوز قيود التطابق المحوري والبيئة الهوائية. حيث سينصب العمل المستقبلي بشكل أساسي على دمج الإزاحات الفراغية العشوائية (الجانبية والزاوية) بالاعتماد على صيغ حساب المحاثة في حالة المحاور المائلة، بالإضافة إلى دراسة أداء الأوساط غير الهوائية عبر إدخال تأثيرات قلوب الفرايت ودروع الحماية حول الملفات، ومحاكاة أثرها على دقة وسرعة التقارب للخوارزميات التحليلية بعد أن تم التحقق من صلاحية النماذج باستخدام التطابق المحوري كحالة مرجعية أساسية.

6. قائمة المراجع:

[1] I. Hussain and D.-K. Woo, “Simplified mutual inductance calculation of Planar spiral coil for wireless power applications,”

Sensors, vol. 22, no. 4, p. 1537, Feb. 2022, doi: .10.3390/s22041537

[2] S. R. Khan, S. K. Pavuluri, and M. P. Y. Desmulliez, "Accurate modeling of coil inductance for Near-Field wireless power transfer," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 66, no. 9, pp. 4158–4169, Jul. 2018, doi: .10.1109/tmtt.2018.2854190

[3] S. Liu, J. Su, J. Lai, J. Zhang, and H. Xu, "Precise modeling of mutual inductance for planar spiral coils in wireless power transfer and its application," IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 36, no. 9, pp. 9876–9885, Feb. 2021, doi: .10.1109/tpel.2021.3061667

[4] G. Di Capua et al., "Mutual inductance behavioral modeling for wireless Power transfer System COILS," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 68, no. 3, pp. 2196–2206, Feb. 2020, .doi: 10.1109/tie.2019.2962432

[5] F. M. Alotaibi, "Optimized coupling coil geometry for high wireless power transfer efficiency in mobile devices," Journal of Low Power Electronics and Applications, vol. 15, no. 2, p. 36, .Jun. 2025, doi: 10.3390/jlpea15020036

[6] R. Palka, "Fast Analytic–Numerical algorithms for calculating mutual and Self-Inductances of air coils," Energies, vol. 17, no. .2, p. 325, Jan. 2024, doi: 10.3390/en17020325

[7] F. W. Grover, Inductance calculations: Working Formulas and .Tables. 1946

[8] F. E. Neumann, "Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme," Annalen Der Physik, vol. 143, no. 1, pp. 31–44, Jan. .1846, doi: 10.1002/andp.18461430103

[9] J. C. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism: Vol. 2. .BoD – Books on Demand, 2023

[10] S. I. Babic and C. Akyel, "Calculating mutual inductance between circular coils with inclined axes in air," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 44, no. 7, pp. 1743–1750, Jun. .2008, doi: 10.1109/tmag.2008.920251

[11] C. Akyel, S. I. Babic, and M.-M. Mahmoudi, "Mutual Inductance Calculation for Non-Coaxial Circular Air Coils with Parallel Axes," Electromagnetic Waves, vol. 91, pp. 287–301, .Jan. 2009, doi: 10.2528/pier09021907

[12] S. Babic, F. Sirois, C. Akyel, and C. Girardi, "Mutual inductance calculation between circular filaments arbitrarily positioned in space: Alternative to Grover's formula," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 46, no. 9, pp. 3591–3600, Apr. 2010, doi: .10.1109/tmag.2010.2047651

[13] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, .1998

[14] P. L. Kalantarov and L. A. Zeitlin, Induktivnost' provodov i konturov [Inductance of Wires and Circuits]. Leningrad: .Energiya, 1973

[15] S. Liu, J. Su, and J. Lai, "Accurate expressions of mutual inductance and their calculation of Archimedean spiral coils," Energies, vol. 12, no. 10, p. 2017, May 2019, doi: .10.3390/en12102017

[16] D. Patil, M. K. McDonough, J. M. Miller, B. Fahimi, and P. T. Balsara, "Wireless Power Transfer for Vehicular Applications: Overview and challenges," IEEE Transactions on Transportation Electrification, vol. 4, no. 1, pp. 3–37, Dec. 2017, doi: .10.1109/tte.2017.2780627

[17] X. Liu and P. Kang, "Inductance calculation and analysis of planar spiral coils in the wireless energy transmission system of implantable cardiac pacemaker," Proceedings Volume 12970, Fourth International Conference on Signal Processing and Computer Science (SPCS 2023), 2023, Guilin, China, vol. 14, .p. 182, Dec. 2023, doi: 10.1117/12.3012498

[18] I. Hussain and D.-K. Woo, "Inductance Calculation of Single-Layer Planar Spiral coil," Electronics, vol. 11, no. 5, p. 750, Feb. .2022, doi: 10.3390/electronics11050750

[19] S. Raju, R. Wu, M. Chan, and C. P. Yue, "Modeling of mutual coupling between planar inductors in wireless power applications," IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 29, no. 1, pp. 481–490, Mar. 2013, doi: .10.1109/tpel.2013.2253334

[20] M. Soma, D. C. Galbraith, and R. L. White, "Radio-Frequency coils in Implantable Devices: Misalignment analysis and design procedure," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-34, no. 4, pp. 276–282, Apr. 1987, doi: .10.1109/tbme.1987.326088

[21] E. B. Rosa and F. W. Grover, Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-inductance (revised). Edward B. .Rosa and F. W. Grover. 1912

[22] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. .Courier Corporation, 1965

[23] R. H. Good, "Elliptic integrals, the forgotten functions," European Journal of Physics, vol. 22, no. 2, pp. 119–126, Feb. .2001, doi: 10.1088/0143-0807/22/2/303

[24] M. Quercio, M. Parise, D. Milillo, L. Sabino, R. Asghar, and F. R. Fulginei, "Analytical modeling of mutual inductance in superconducting pancake coils for wireless power transfer systems," IEEE Access, vol. 13, pp. 90698–90705, Jan. 2025, doi: 10.1109/access.2025.3572733

[25] M. M. Abulaweenat, "Parameters effecting performance of wireless power transfer system," Journal of Pure & Applied Sciences, vol. 17, no. 1, Jul. 2018, doi: .10.51984/jopas.v17i1.82

[26] أ.أ. عمران و م. م. أبوالعوينات، "دراسة تأثير تغيير القطر الخارجي لملف الأرسال على أداء منظومة نقل للطاقة مستخدمة في الأغراض الطبية لأجهزة مزروعة داخل جسم الأنسان" Journal of Pure & Applied Sciences, vol. 20, no. 2, pp. 71–76, Sep. 2021, doi: .10.51984/jopas.v20i2.1462