مجلة العلوم البحتة والتطبيقية
Journal of Pure & Applied Sciences
www.Suj.sebhau.edu.ly ISSN 2521-9200
Received 27/05/2019 Revised 19/08/2019 Published online 11/12/2019

نتائج حول حجم رتبة الزمر الإبدالية المنتهية التي لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي المحتوية على زمر سيلو-p الجزئية الدورية

*صفاء الحضيري
قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة سبها، ليبيا
*للمراسلة saf.alhodairy@sebhau.edu.ly

الملخص الغرض من هذه الورقة هو عرض الزمر التي لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي التي كونت من قبل الرياضيان كاري فنتش Carrie Finch و ليني جونز Lenny Jones في عام 2002 م، و استعراض النظريات و النتائج حول رتبة هذه الزمر. هذه الدراسة بينت أنه إذا كان G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي حيث بعض أدلة زمر سيلو الجزئية الدورية أعداد أولية لا تقسم $|G|$ و غير مكافئة لأي من الزمر التسعة الاساسية الغير محتوية على الأدلة المعنية، فإن $|G|$ تقريباً تؤول إلى المالانهاية.

الكلمات المفتاحية: رتبة زمر، إبدالية لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي، زمر دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي، زمر سيلو $p-$ الدورية الجزئية.

Results about Size of Order of Abelian finite Groups with Perfect Order Subsets Contained Sylow-p Subgroups

*S. Alhodairy
*Corresponding author: saf.alhodairy@sebhau.edu.ly

Abstract The purpose of this paper is presenting groups with perfect order subsets (or POS groups) which have made by the mathematicians Carrie Finch and Lenny Jones in 2002, and also presenting theorems and results about order of these groups. This study showed that if G is a minimal abelian finite group with perfect order subsets where the indexes of cyclic sylow-p subgroups are prime numbers do not divide $|G|$, and not isomorphic to any of the main nine groups which not have the identified indexes, then $|G|$ almost goes to infinity.

Keywords: abelian groups with perfect order subsets, cyclic sylow-p subgroups, minimal groups with perfect order subsets, order of groups.

المقدمة

في بداية العقد الماضي، قام الرياضيان فنتش وجونز بتقديم مفهوم جديد في نظرية الزمر وهو الزمر التي لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. هذه الزمر مكافئة للزمرة $\mathbb{Z}_n$ التي عناصرها هي $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ تحت وحدة الجمع (Addition Modulo). يقال بأن الزمرة G أو نكتب $(G,+)$ لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي إذا كان عدد عناصر الفئة الجزئية الترتيبية لكل عنصر في الزمرة G يقسم عدد عناصر G. مثال على ذلك: الزمرة $\mathbb{Z}_5$ ليس لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. ذلك لأن فيها عنصر واحد من الرتبة 1 و 4 عناصر من الرتبة 4، بالتالي ليس كل عدد عناصر الفئة الجزئية الترتيبية يقسم $|\mathbb{Z}_5| = 5$، أي أن $1 \mid 5$ ولكن $4 \nmid 5$. بينما الزمرة $\mathbb{Z}_4$ لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. ذلك لأن فيها عنصر واحد من الرتبة 1 و آخر من الرتبة 2 و عنصرين من الرتبة 4، بالتالي عدد عناصر الفئة الجزئية الترتيبية لكل عنصر يقسم $|\mathbb{Z}_4| = 4$. في هذه الدراسة وضعنا فرضية حول تحديد حجم رتبة هذه الزمر. من الزمر التسعة الأساسية يوجد خمسة زمر رتبتها لا تقبل القسمة على 17 هي$\mathbb{Z}_2$، $(\mathbb{Z}_2)^2\times\mathbb{Z}_3$، $(\mathbb{Z}_2)^3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$، $(\mathbb{Z}_2)^4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$ أو $(\mathbb{Z}_2)^5\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{31}$ و استناداً على نظريات اثبتها مايكل فلكرسون Michael Fulkerson في [2] و [3] نجد أن رتبة أي زمرة غير مكافئة للزمر الخمسة المذكورة أعلاه أكبر بكثير من 10^{10^7}. بالتالي إذا كانت G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي حيث بعض أدلة زمر سيلو ذات الأعداد الأولية لا تقسم $|G|$، و غير مكافئة لأي من الزمر التسعة الأساسية التي لا تحتوي على الدليل المعني، فإن $|G|$ على الأغلب تؤول إلى المالانهاية.

1 مفاهيم تمهيدية

تعريف 1 لتكن G زمرة, $x \in G$. نعرف الفئة الجزئية الترتيبية (Order Subset) للزمرة G المحددة بالعنصر x بأنها فئة كل العناصر في G التي لها نفس رتبة x. [1]

تعريف 2 لتكن G زمرة. يقال بأن G لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي (POS group) إذا كان عدد عناصر الفئة الجزئية الترتيبية للزمرة G يقسم عدد عناصر G. [1]

فرضية 1 إذا كانت الزمرة G لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. وكان العدد p عدد أولي يقسم $|G|$، فإن $(p-1)$ تقسم $|G|$. [1]

نتيجة 1 إذا كانت الزمرة G لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و G ليست الزمرة التافهة. فإن $|G|$ عدد زوجي. [1]

لاحظ أنه إذا كان $|G|$ عدد فردي، فإن الزمرة ليس لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. كذلك إذا كان $|G|$ عدد زوجي فإنه ليس بالضرورة أن يكون للزمرة فئات جزئية ذو ترتيب مثالي.

تعريف 3 إذا كانت G زمرة ذات الرتبة n. حيث $n=\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$، و d يقسم n حيث $d \in \mathbb{Z}_+^*$. عدد عناصر G ذات الرتبة d هو $\Phi(d)$ حيث:

$$n=\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i},\ \Phi(d)=\prod_{i=1}^{m}(p_i-1)\left(p_i^{k_i-1}\right).$$

و تسمى $\Phi(d)$ بدالة فاي أويلر (Euler Phi Function). [5]

نظرية 1 إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}_n$، و كان $n=2^a3^b$ حيث $a \geq 1$، $b \geq 0$، فإن G لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. [5]

البرهان يكتفي أن نوضح أن $\Phi(d)\,|\,n$ لكل d قواسم لـــ n.

لتكن $n=2^k3^l$ حيث $1 \leq k \leq a$ و $1 \leq l \leq b$

$$\Phi(d)=(1)\left(2^{k-1}\right)(2)\left(3^{l-1}\right)=\left(2^k\right)\left(3^{l-1}\right)$$

بما أن $k \leq a$ و $(l-1) \leq b$ واضح أن $\Phi(d)\,|\,n$

عندما $k=0$ و $l=0$ فإن $\Phi(d)\,|\,n$ كالآتي:

إذا كانت $k \geq 1$ و $l=0$، $\Phi(d)=(1)\left(2^{k-1}\right)\,|\,n$

إذا كانت $k=0$ و $l \geq 1$، $\Phi(d)=(2)\left(3^{l-1}\right)\,|\,n$

إذا كانت $k=0$ و $l=0$، $\Phi(d)=1\,|\,n$

فرضية 2 ليكن $a, b, t \in \mathbb{Z}_+^*$ حيث $b \leq a$. ولتكن $G \cong (\mathbb{Z}_{p^a})^t$ حيث p عدد أولي، فإن عدد العناصر في G ذات الرتبة p^b هو $\left(p^{(b-1)}\right)^t(p^t-1)$. [1]

فرضية 3 لتكن $G \cong (\mathbb{Z}_{p^a})^t \times M$ و $\hat{G} \cong (\mathbb{Z}_{p^{a+1}})^t \times M$ حيث M زمرة دورية و $a,t \in \mathbb{Z}_+^*$ و p عدد أولي لا يقسم $|M|$. إذا كانت d هي رتبة عنصر في $\hat{G}$ و p^{a+1} لا تقسم d، فإن كلاً من G و $\hat{G}$ يحتويان علي نفس العناصر ذات الرتبة d. [1]

نظرية 2 (النظرية التصاعدية Going-Up Theorem)

لتكن $G \cong (\mathbb{Z}_{p^a})^t \times M$ و $\hat{G} \cong (\mathbb{Z}_{p^{a+1}})^t \times M$، حيث M زمرة دورية و $a,t \in \mathbb{Z}_+^*$ و p عدد أولي لا يقسم $|M|$. إذا كان لـــ G زمرة منتهية ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي، فإن $\hat{G}$ أيضاً لها زمرة منتهية ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. [1]

نظرية 3 (نظرية الإزالة Chopping- Off Theorem)

لتكن G لها زمرة منتهية ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي حيث:

$G \cong \mathbb{Z}_{p^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{a_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{a_{s-1}}} \times (\mathbb{Z}_{p^{a_s}})^t \times M$،

حيث M زمرة دورية و p عدد أولي لا يقسم $|M|$ و $a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_{s-1} < a_s$ هي عبارة عن أعداد صحيحة موجبة. فإن $\breve{G} \cong (\mathbb{Z}_{p^{a_s}})^t \times M$ هي كذلك زمرة ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. [1]

نظرية 4 (النظرية التنازلية Going-Down Theorem)

لتكن G لها زمرة منتهية ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. و $G \cong (\mathbb{Z}_{p^a})^t \times M$، حيث M زمرة دورية وليكن p عدد أولي لا تقسم $|M|$، فإن $\breve{G} \cong (\mathbb{Z}_p)^t \times M$ هي كذلك زمرة ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. [1]

تعريف 4 لتكن $G \cong (\mathbb{Z}_2)^t \times M$، حيث M زمرة إبدالية ورتبة M عدد فردي. نقول أن G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي(Minimal POS group) إذا كانت G زمرة لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و لا يوجد أي زمرة جزئية ولتكن $\widehat{M}$ للزمرة G حيث أن $(\mathbb{Z}_2)^t \times M$ تكون زمرة ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. [1]

نظرية 5 (النظرية الأساسية The Main Theorem)

لتكن G زمرة إبدالية منتهية ذات رتبة زوجية حيث زمرة سيلو $-p$ الجزئية هي زمرة دورية ذات رتبة p حيث p عدد أولي يقسم $|G|$. إذا كانت G زمرة لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي، فإن G تكون مكافئة مع إحدى الزمر التسعة التالية:

$\mathbb{Z}_2$

$(\mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_3$

$(\mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$

$(\mathbb{Z}_2)^4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

$(\mathbb{Z}_2)^5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{31}$

$(\mathbb{Z}_2)^8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17}$

$(\mathbb{Z}_2)^{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{257}$

$(\mathbb{Z}_2)^{17} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{257} \times \mathbb{Z}_{131071}$

$(\mathbb{Z}_2)^{32} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{257} \times \mathbb{Z}_{65537}$

هذه الزمر التسعة هي الزمر الدنيا الوحيدة لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي التي على زمر سيلو دورية. [1]

تعريف 5 لتكن

$$G \cong (\mathbb{Z}_{p_1})^{a_1} \times (\mathbb{Z}_{p_2})^{a_2} \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_n})^{a_n}$$

حيث $p_1, p_2, \dots, p_n$ أعداد أولية مختلفة. فإن ضرب G ($Product\ of\ G\ or\ Prod\ of\ G$) هو:

$$=Prod(G) \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{a_i}}{p_i^{a_i-1}}$$

[4]

نتيجة 2 إذا كانت G زمرة دنيا لها ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و ليست الزمرة التافهة، فإن $prod(G) \geq 2$.
[4]

البرهان لنفرض أن G زمرة دنيا ذات فئات جزئية ذو ترتيب مثالي ليست تافهة. حيث

$$G \cong (\mathbb{Z}_{p_1})^{a_1} \times (\mathbb{Z}_{p_2})^{a_2} \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_n})^{a_n}$$

حيث $p_1, p_2, \cdots, p_n$ أعداد أولية. حسب الفرضية 1، لدينا $p_i^{a_i}-1$ تقسم $|G|$, لكل $i = 1,2,3,\dots,n$

لذلك:

$$(p_1^{a_1}-1).\cdots.(p_n^{a_n}-1) = (p_1^{b_1}).(p_2^{b_2}).\cdots.(p_n^{b_n})$$

لكل $b_1, \cdots, b_n$ إذن:

$$prod\,(G) \cong \frac{(p_1^{a_1}).(p_2^{a_2}).\cdots.(p_n^{a_n})}{(p_1^{a_1}-1)(p_2^{a_2}-1).\cdots.(p_n^{a_n}-1)} = \frac{(p_1^{a_2}).(p_2^{a_2}).\cdots.(p_n^{a_n})}{(p_2^{b_2}).(p_2^{b_2}).\cdots.(p_n^{b_n})}$$

نتيجة الجمع تؤكد أن ذلك $a_i \geq b_i$ لكل $i = 1,2,\cdots,n.$ إذن $prod(G) \in \mathbb{N}$.

حسب تعريف ضرب G و واضح أنه لدينا $prod(G) \neq 1$. إذن $prod(G) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. هذا يعني أن $prod(G) \geq 2$.

2 حجم رتبة الزمر الإبدالية التي لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي:

دراسة سابقة قدمت من قبل مايكل فلكرسون حول حجم رتبة الزمرالإبدالية الدنيا التي لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي برهن فيها النظريات أدناه.

نظرية 6 لتكن G زمرة لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. و ليكن $|G| = n$. نفرض أن $5 \nmid n$ و أن G غير مكافئة للزمر $\mathbb{Z}_2$ ، $(\mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_3$ أو $(\mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$. بالتالي $|G| > 6.62 \times 10^{336}$. [2]

نظرية 7 لتكن G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و نفرض أن 5 و 7 لا يقسمان $|G|$. إذا كانت G غير مكافئة للزمر $\mathbb{Z}_2$ و $(\mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_3$ فإن $|G| > 10^{10^7}$.[3]

نتيجة 3 إذا كان G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و غير مكافئة لأي من الزمر التسعة المعروفة الموضحة أعلاه، فإن العدد 2^{14} يقسم $|G|$. [2]

مسلمة 1 لتكن G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و أن 17 لا يقسم $|G|$، فإن الزمرة G تكون مكافئة لأحدى الزمر: $\mathbb{Z}_2$، $(\mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_3$، $(\mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$،
$(\mathbb{Z}_2)^4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ أو $(\mathbb{Z}_2)^5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{31}$

فرضية 4 لتكن G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي. بفرض أن 17 لا يقسم $|G|$ و أن G غير مكافئة للزمر التالية: $\mathbb{Z}_2$ أو $(\mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_3$ أو $(\mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ أو
$(\mathbb{Z}_2)^4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ أو $(\mathbb{Z}_2)^5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{31}$

فإنه بناءاً على النظرية 6 و النظرية 7 و النتيجة 1 ستكون $|G|$ كبيرة جدا جدا تقريبا $|G| >> 10^{10^7}$.

الآن يمكن وضع النتيجة التالية:

نتيجة 3 إذا كان G زمرة دنيا لها فئات جزئية ذو ترتيب مثالي و غير مكافئة لأي من الزمر التسعة الأساسية. و بفرض أن اي عدد أولي من زمر سيلو – p لا يقسم $|G|$، فإن $|G|$ على الأغلب كبيرة جدا تؤول إلى المالانهاية.

قائمة المراجع

[1]- Finch, C.& Jones, L. 2002. “A Curious Connection between Fermat Numbers and Finite Groups”. The American Mathematical Monthly, (109) 517-523

[2]- Fulkerson, M. 2015. A Bound on Class of Minimal POS Groups. International Journal of Algebra, (11) 615-621

[3]- Fulkerson, M. 2016. Size Estimates on Perfect Order Subset Groups Having Trivial Sylow 5- and 7-Subgroups. International Mathematical Forum, (13) 495-502

[4]- Fulkerson, M. 2003. Perfect Order Subsets Groups. MS Thesis, University of Central Michigan, Michigan, USA. 10-30

[5]- Smith. 2008.Characteristic of Groups with Perfect Order Subsets. Retrieved on 6-6-20 from: http://sections.Maa.org/lams/proceeding/sprng2008/