مجلة العلوم البحتة والتطبيقية
Journal of Pure & Applied Sciences
www.Suj.sebhau.edu.ly ISSN 2521-9200
Received 05/01/2018 Revised 02/02/2018 Published online 22/04/2018

معالجة عددية لمعادلة لابلاس ذات البعدين باستخدام طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية

*نعيمة سعد شمسي و عمر العياط
قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة سبها، ليبيا
* للمراسلة: nai.saadshamsi@sebhau.edu.ly

الملخص هذه الورقة تقدم دراسة لطريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية لإيجاد حل مسألة انتشار الحرارة في صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل مُثبتة من الجانب الأيسر والجانب السفلي على محاور الإحداثيات وعند الصفر درجة مئوية، بينما الجانب الأيمن والعلوي حُفظوا عند درجات حرارة معينه، والتي حاكتها معادلة لابلاس ذات البعدين مع شروط ديرشلت الحدية، بالإضافة إلى استخدام الطرق التكرارية كطريقة جاكوبي وطريقة جاوس – سيدال في حل نظام المعادلات الجبرية الخطية. أوضحت الدراسة أن النتائج العددية لطريقة الفروق المحدودة كانت متطابقة مع النتائج العددية لطريقة العناصر المنتهية، وأن الطريقتين كانتا ذات دقة عالية وذلك بالمقارنة مع الحل التحليلي. ومن جانب آخر كانت طريقة جاوس–سيدال التكرارية أسرع في الوصول لحل أنظمة المعادلات الخطية وأكثر دقة من طريقة جاكوبي التكرارية.

الكلمات المفتاحية: طريقة الفروق المحدودة، طريقة العناصر المنتهية، معادلة لابلاس ذات البعدين.

Numerical Process Of Two Dimensional Laplace's Equation Using Finite Difference and Finite Element Method

*N. Shamsi , O. Elayat
Department of Mathematics, Faculty of Science , Sebha University, Libya
*Corresponding author: nai.saadshamsi@sebhau.edu.ly

Abstract This paper presents a study of finite difference method and finite element method to solve the problem of spreading of temperature in a thin metal square plate installed from the left side and the lower side on the coordinate axes and at zero centigrade, while the right and upper sides were kept at certain temperatures, which the two dimensional Laplace equation simulated with Dirichlet boundary conditions. In additions by using iterative methods as Jacobi method and Gauss- Seidel method to solving the system of linear algebraic equations. The study has showed that the numerical results of the finite difference method were identical with the numerical results of the finite element method and the two methods were highly accurate in comparison to the analytical solution. On the other hand, the method of Gauss- Seidel iterative was faster in solving linear equation systems and more accurate than Jacobi iterative method.

Keywords: Finite Difference Method , Finite Element Method, Two Dimensional Laplace Equation .

المقدمة

تعتبر معادلة لابلاس (Laplace's Equation)من أشهر المعادلات التفاضلية الجزئية والتي تعود للرياضي والفلكي الفرنسي بير سايمون لابلاس (1749–1827) (-Pierre Simon Laplace،الذي يعتبر أعظم شارح للميكانيكا الفلكية مند نيوتن، مبيناً أن اضطرابات الكواكب لا تشوش استقرار المنظومة الشمسية بل تحافظ عليها و أثبت أن التنفس هو نوع من الاحتراق [4]. تتمثل أهمية معادلة لابلاس في محاكاة معظم الظواهر الطبيعية والفيزيائية، وتعد مثالا للمعادلات التفاضلية الناقصية (Elliptic Partial Differential Equation). ظهر أول استعمال لمعادلة لابلاس في الميكانيكا التقليدية ثم تطور استعمالها لعدت مجالات مثل: علم الفلك، الكهرباء الساكنة، ميكانيكا الموائع، ميكانيكا الكم، وكذلك انتشار الحرارة والمياه. [11] تعتبر الطرق العددية من الطرق التي تعطي نتائج فعالة في إيجاد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس ذات البعدين مثل: طريقة الفروق المحدودة (Finite Differences Method) وطريقة العناصر المنتهية (Finite Element Method).

طريقة الفروق المحدودة هي أسلوباً عددياً تعتمد على تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية التي ليس لها حل تحليلي إلى نظام من المعادلات الجبرية الذي يمكن حله بعدت طرق عددية، أما ألية طريقة العناصر المنتهية تتم من خلال تقريب المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية عادية ثم تكوين نموذج للطريقة يعبر عنه بنظام من المعادلات الجبرية.حل نظام المعادلات الجبرية الناتج من تطبيق طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية يمكن باستخدام عدت طرق منها الطرق العددية التكرارية.

تعتبر الطرق التكرارية الغير مباشرة فعالة في حل الأنظمة الجبرية ذات العدد كبير من المجاهيل، حيث يمكنها التحكم في خطأ التقريب وكذلك الحصول على نتائج ذات دقة موسعة.

الطرق العددية التكرارية المستخدمة في هذه الدراسة هي: طريقة جاكوبي (Jacobi method)، نسبة إلى الرياضي الألماني كارل غوستاف جاكوبي (Kar Gustav Jacobi, 1804-1851) وطريقة جاوس-سيدال (Gauss-Seidel method). والتي سميت نسبة للعالمين الرياضيين الألمانيين كارل فريدريش جاوس (1777–1855) Gauss Carl Friedrich وفيليب لوديش سيدال (1821–1896) Philipp Ludwig von Seidel [4].

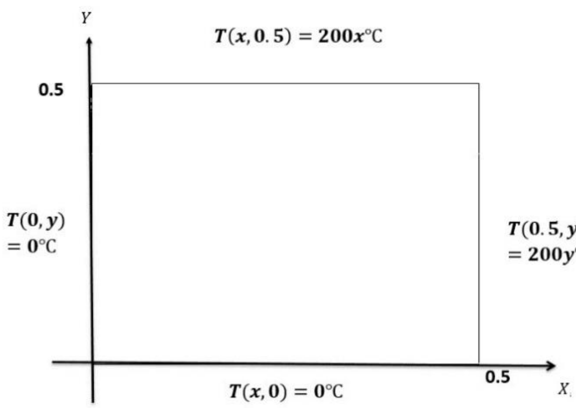
استناداً إلى ما تقدم، فإن الهدف من هذه الدراسة هو تطبيق طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس ذات البعدين مع شروط ديرشلت الحدية (Dirichlet boundary conditions) ومقارنته بالحل التحليلي، ومن جانب أخر مقارنة الطرق التكرارية المستخدمة في إيجاد حل نظام المعادلات الجبرية الخطية الناتج من تطبيق طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية، مثل طريقة جاكوبي وطريقة جاوس – سيدال.

وصف المسألة: ندرس مسألة تحديد التوزيع المستقر للحرارة في صفيحة معدنية رفيعة على شكل مربع:

$$\Omega = \{(x,y) \vee 0 < x < 0.5, 0 < y < 0.5\} \qquad (1)$$

إذا وضعنا جوانب الصفيحة على المحورين X,Y كما هو موضحة في شكل (1)، فإن المسألة يعبر عنها بمعادلة لابلاس ذات البعدين مع شروط ديرشلت الحدية كالاتي:[5]

$$\begin{aligned} &T_{xx} + T_{yy} = 0 \\ &T(0,y) = 0°\text{C}, T(0.5,y) = 200y°\text{C} \\ &T(x,0) = 0°\text{C}, T(x,0.5) = 200x°\text{C} \end{aligned} \qquad (2)$$



شكل 1: توزيع درجات الحرارة (الشروط الحدية).

طريقة الفروق المحدودة:

Finite Differences Method (FDM)

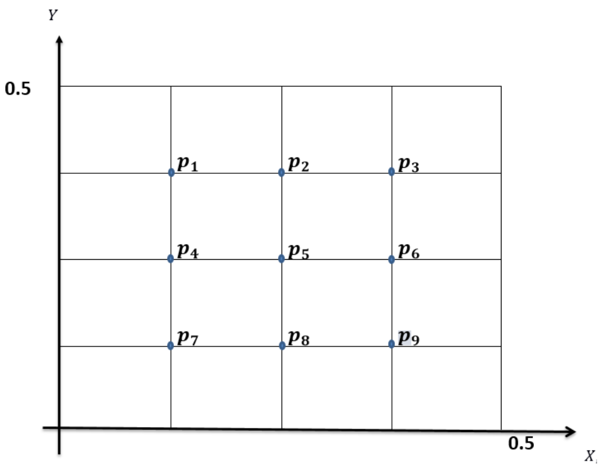
تعتمد فكرة طريقة الفروق المحدودة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية على تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلات الفروق المحدودة (Finite Difference Equations) (FDE) وذلك باستبدال المشتقات بتعابير عددية (Numerical Expression) تشتمل على قيم المتغير التابع عند نقاط منتظمة داخل نطاق المتغير المستقل. تتلخص خطوات طريقة الفروق المحدودة في الاتي:

النقاط الأساسية طريقة الفروق المحدودة:

1. تكوين شبكة الفروق المحدودة Finite Difference Grid.
2. استنتاج تقريبات الفروق المحدودة Finite Difference Approximations.
3. اشتقاق معادلات الفروق المحدودة Finite Difference equations.[7,2]

يتم تكوين شبكة الفروق المحدودة شكل (2) باختيار $m = n = 4$ وتقسيم المسافات في نطاق المشكلة شكل (1) في الاتجاهين x,y إلي عدد محدود من المسافات الجزئية بفروق $\Delta x, \Delta y$ على الترتيب، حيث:

$$\Delta y = \frac{0.5}{4} = 0.125 \text{ ، } \Delta x = \frac{0.5}{4} = 0.125 \qquad (3)$$



شكل 2: شبكة الفروق المحدودة.

وباستخدام الفروق المركزية واستنتاج معادلة الفروق والتي تعطي بالعلاقة التالية:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}[T| \quad |i+1,j + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}] \qquad (4)$$

ثم بالتعويض عن نقاط الشبكة الداخلية في المعادلة (4) نحصل على نظام من المعادلات الجبرية الخطية المعرف كالتالي:

$$[A]_{9\times9}[T_{i,j}]_{9\times1} = \{B\}_{9\times1} \qquad (5)$$

النظام (5) سيتم حله باستخدام الطرق التكرارية غير المباشرة.

طريقة العناصر المنتهية:

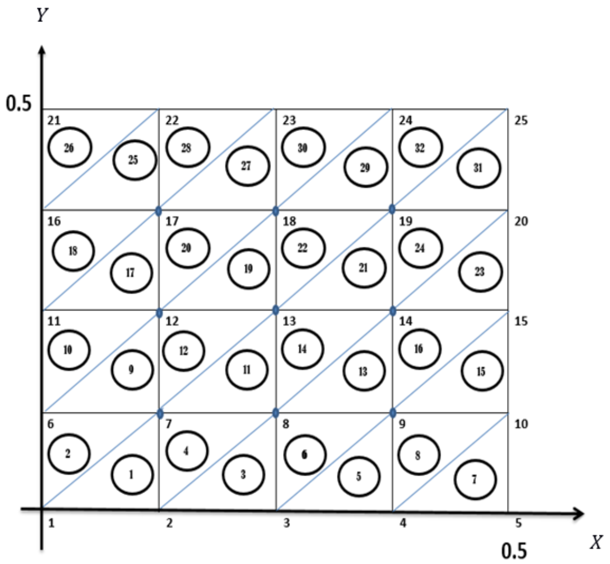
Finite Element Method(FEA)

طريقة العناصر المنتهية هي تقنية رقمية لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية العادية أو الجزئية المعبرة عنها المسألة، يتم من خلالها تمثيل النطاق المعطى بعدد من النطاقات البسيطة والتي تسمى عناصر أو أجزاء (Element) وبناء دوال التقريب عليها. تتلخص خطوات طريقة العناصر المنتهية في الاتي:

النقاط الأساسية لطريقة العناصر المنتهية:

1. تقسيم النطاق Discretization of domain.
2. استنتاج معادلات العناصر Derivation of element equation .
3. تجميع العناصر Assembly of elements .
4. تطبيق الشروط الحدية Imposition of boundary conditions. [6]

يتم تقسيم نطاق المسألة شكل (1) إلى 32 عنصر من المثلثات المتساوية، مرقمه ومحصورة من الرقم 1 إلى الرقم 32، وبهذا التقسيم نحصل على 25 عقد عامة (Global Nodes) مرقمة من 1 إلى 25 كما هو موضحة بالشكل (3).



شكل 3: شبكة العناصر المنتهية.

يتم بناء الصيغة الضعيفة باستخدام طريقة البواقي الموزونة

$$\int_{\Omega} WRd\Omega = 0 \qquad (6)$$

حيث $R(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ و $W(x,y)$ دالة الوزن العامة.
بالإضافة إلى استنتاج معادلات العنصر باستخدام دوال التقريب للعنصر المثلث ذو الثلاثة عقد، وطريقة جالكرين Galerkin Method لاختيار دوال الوزن، ثم تتم عملية تجميع مصفوفة المعاملات العامة، وبما أنه توجد25 عقدة، فإن مصفوفة المعاملات العامة ستكون مصفوفة من الدرجة 25×25.

$$[K^e]_{25\times25}[T_j^e]_{25\times1} = \{Q^e\}_{25\times1} \qquad (7)$$

والنظام (7) سيتم حله باستخدام الطرق التكرارية غير المباشرة [10,8,6].

الطرق التكرارية:

Iterative Methods

طريقة جاكوبي التكرارية:

Jacobi Iterative Method

تعتبر طريقة جاكوبي للتقريب المتتالي، من أبسط الطرق التكرارية لحل النظام الخطي المربع.

الصيغة العامة لطريقة جاكوبي تكتب في الصورة التالية:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \qquad (8)$$

طريقة جاوس – سيدال التكرارية

Gauss-Seidel Iterative Method

طريقة جاوس – سيدال هي إحدى الطرق التكرارية المشهورة والتي تكتب الصيغة العامة لها بالعلاقة:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \qquad (9)$$

$i = 1,2,\dots,n; k \geq 0.$
. [9,6,5]

النتائج

أولاً: بتطبيق طريقة الفروق المحدودة وإيجاد الحلول التقريبية لطريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال عند درجات دقة 10^{-3}، 10^{-4}و 10^{-5} باستخدام برنامج الماتلاب.

ثم مقارنة الحلول التقريبية الناتجة مع الحل التحليلي للمسألة (2):

$$T_{Exact} = 400xy \qquad (10)$$

والذي تم الحصول علية باستخدام طريقة فصل المتغيرات.

جدول (1) يوضح نتائج الطرق التكرارية لحل النظام الخطي (5)عند درجة دقة 10^{-5} مع الخطأ المطلق كل من الطريقتين.

جدول 1: الحلول التقريبية الناتجة من تطبيق طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال لحل النظام (5) عند درجة دقة 10^{-5}مع الخطأ لكل من الطريقتين.

Node	T_{Exact}	*Jacobi*	*Gauss Seidel*	*Jacobi erorr*	*Gauss Seidelerorr*
p_1	18.75	18.7489	18.7497	0.0011	0.0002623
p_2	37.5	37.4985	37.4997	0.0015	0.0002623
p_3	56.25	56.2489	56.2499	0.0011	0.0001311
p_4	12.5	12.4985	12.4995	0.0015	0.0005245
p_5	25	24.997	24.999	0.002	0.000524

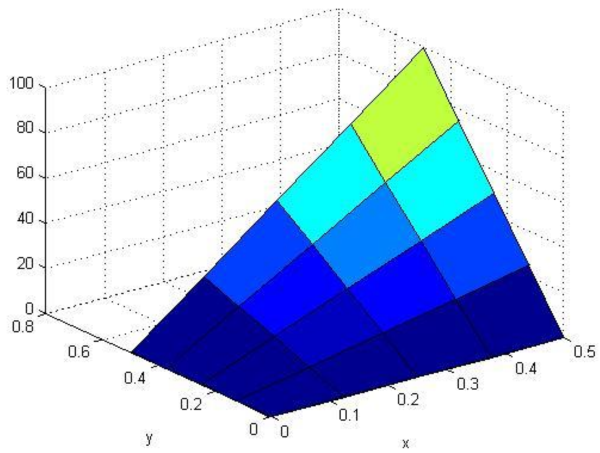
		7	5	3	5
p_6	37.5	37.4985	37.4997	0.0015	0.0002623
p_7	6.25	6.2489	6.2495	0.0011	0.0005245
p_8	12.5	12.4985	12.4995	0.0015	0.0005245
p_9	18.75	18.7489	18.7497	0.0011	0.0002623

كذلك جدول (2) يوضح عدد التكرارات وزمن الحسابات الازمة لتطبيق طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال لحل النظام (5)عند درجات دقة10^{-3}،10^{-4}و10^{-5}.

جدول 2: عدد التكرارات وزمن الحسابات لطريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال.

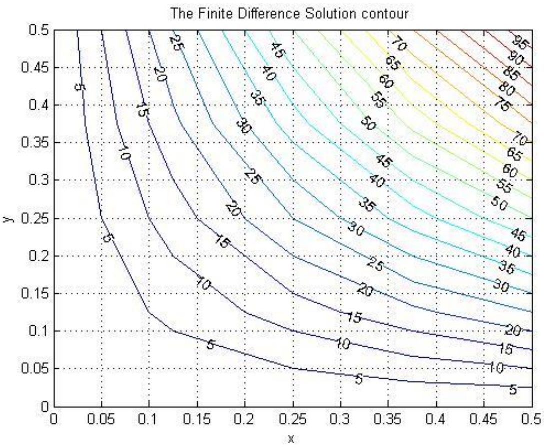
الطريقة التكرارية	درجة الدقة	عدد التكرارات	زمن الحسابات ببرنامج الماتلاب
جاكوبي	10^{-3}	16	0.017912sec
جاوس – سيدال	10^{-3}	11	0.016777sec
جاكوبي	10^{-4}	23	0.004261sec
جاوس – سيدال	10^{-4}	15	0.020349sec
جاكوبي	10^{-5}	29	0.000965sec
جاوس–سيدال	10^{-5}	18	0.009346sec

وأخيراً، الشكل(4) يوضح حل المسألة (2) باستخدام طريقة الفروق المحدودة مع طريقة جاوس–سيدال التكرارية عند درجة دقة 10^{-5}.



شكل 4: الحل التقريبي لطريقة الفروق المحدودة باستخدام طريقة جاوس–سيدال التكرارية.

بالإضافة إلى أن شكل (5) يوضح الحل التقريبي لمعادلة لابلاس ذات البعدين مسألة (2) باستخدام طريقة الفروق المحدودة وتوزيع درجات على الصفيحة المعدنية.



شكل 5: توزيع درجات الحرارة باستخدام طريقة الفروق المحدودة على الصفيحة المعدنية.

ثانياً: يتم تطبيق طريقة العناصر المنتهية واستخدام طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال لإيجاد حل النظام (7) ، عند درجة دقة 10^{-3}،10^{-4}و10^{-5} جدول (3) يوضح الحلول التقريبية للطرق التكرارية عند درجة دقة 10^{-5}.

جدول 3: الحلول التقريبية الناتجة من تطبيق طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال لحل النظام (7) عند درجة دقة 10^{-5}.مع الخطأ لكل من الطريقتين.

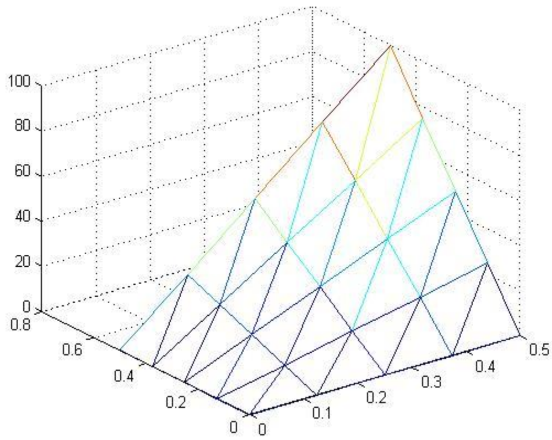
Node	T_{Exact}	*Jacobi*	*Gauss Seidel*	*Jacobi erorr*	*Gauss Seidelerorr*
17	18.75	18.7489	18.7497	0.0011	0.0002623
18	37.5	37.4985	37.4997	0.0015	0.0002623
19	56.25	56.2489	56.2499	0.0011	0.0001311
12	12.5	12.4985	12.4995	0.0015	0.0005245
13	25	24.9977	24.9995	0.0023	0.0005245
14	37.5	37.4985	37.4997	0.0015	0.0002623
7	6.25	6.2489	6.2495	0.0011	0.0005245
8	12.5	12.4985	12.4995	0.0015	0.0005245
9	18.75	18.7489	18.7497	0.0011	0.0002623

كما يوضح الجدول (4) عدد التكرارات وزمن الحسابات الازم لتنفيذ طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال لحل نظام المعادلات (7)عند درجات دقة10^{-3}،10^{-4}و10^{-5}.

جدول 4: عدد التكرارات وزمن الحسابات لطريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال.

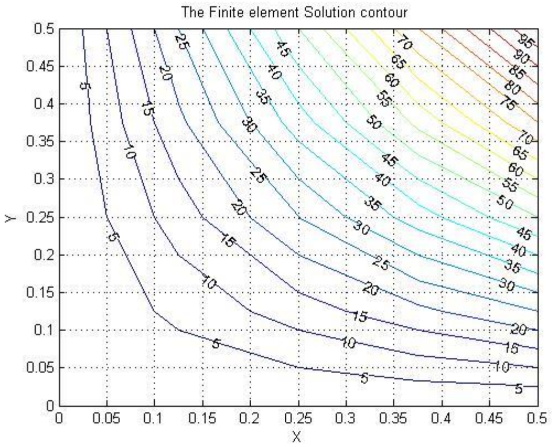
الطريقة التكرارية	درجة الدقة	عدد التكرارات	زمن الحسابات ببرنامج الماتلاب
جاكوبي	10^{-3}	16	0.017912sec
جاوس – سيدال	10^{-3}	11	0.016777sec
جاكوبي	10^{-4}	23	0.004261sec
جاوس – سيدال	10^{-4}	15	0.020349sec
جاكوبي	10^{-5}	29	0.025247sec
جاوس–سيدال	10^{-5}	18	0.032023sec

وأخيراً، الشكل(6) يوضح شكل حل المسألة (2) باستخدام طريقة العناصر المنتهية مع طريقة جاوس–سيدال التكرارية عند درجة دقة 10^{-5}.



شكل 6: الحل التقريبي لطريقة العناصر المنتهية باستخدام طريقة جاوس–سيدال التكرارية.

بينما توزيع درجات على الصفيحة المعدنية ،أي الحل التقريبي لمعادلة لابلاس ذات البعدين مسألة (2) باستخدام طريقة العناصر المنتهية موضح في الشكل (7).



شكل 7: توزيع درجات الحرارة باستخدام طريقة العناصر المنتهية على الصفيحة المعدنية.

المناقشة:

بإجراء مقارنة بين طريقة جاكوبي وطريقة جاوس–سيدال وذلك بملاحظة النتائج الموضحة في الجداول (1) و (3) من حيث مقدار الخطأ للطريقتين وعدد التكرارات الموضح في الجداول (2) و (4) نجد أن طريقة جاوس–سيدال استغرقت عدد تكرارات أقل في الوصول للحل مقارنةً بعدد تكرارات طريقة جاكوبي وأن الخطأ المطلق لطريقة جاوس–سيدال كان أقل من الخطأ المطلق طريقة جاكوبي. مما يعني أن طريقة جاوس–سيدال كانت هي الأسرع في الوصول للحل وأكثر دقة من طريقة جاكوبي.

بعمل مقارنة بين الحلول العددية لطريقة الفروق المحدودة والحلول العددية لطريقة العناصر المنتهية والحل التحليلي. كما هو وارد في الجداول (1) و (4) وملاحظة الحل لطريقة الفروق المحدودة شكل (4) والحل لطريقة العناصر المنتهية شكل (5)، وكذلك ملاحظة توزيع درجات الحرارة لطريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية شكل (6) و(7) على التوالي، نستنتج أن النتائج العددية لطريقة الفروق المحدودة متطابقة مع النتائج العددية لطريقة العناصر المنتهية. وأن الطريقتان كانتا ذات دقة عالية وذلك مقارنة مع الحل التحليلي.

الخلاصة

قدمنا في هذه الدراسة تطبيق مبسط لحل مسألة انتشار الحرارة داخل صفيحة معدنية رقيقة، والتي عبرت عنها رياضياً معادلة لابلاس ذات البعدين مع شروط درشلت الحدية. حيث استخدمت طريقة فصل المتغيرات لإيجاد الحل التحليلي لها، بينما استخدمت طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المنتهية لإيجاد الحلول التقريبية، وتمت الاستعانة بالطرق التكرارية غير

المباشرة كطريقة جاكوبي وطريقة جاوس-سيدال في إيجاد حل أنظمة المعادلات الجبرية، تمت عملية حساب نتائج الطرق السابقة الذكر ورسم النتائج باستخدام برنامج الحاسوب الماتلاب ، أوضحت الدراسة أن:

- النتائج العددية لطريقة الفروق المحدودة متطابقة تقريباً مع النتائج العددية لطريقة العناصر المنتهية.
- الطريقتان كانتا ذات دقة عالية وذلك مقارنة مع الحل التحليلي.
- طريقة جاوس-سيدال التكرارية كانت أسرع في الوصول لحل أنظمة المعادلات الخطية وأكثر دقة من طريقة جاكوبي.

شكر وتقدير

نقدم أبلغ الشكر والتقدير للدكتور محمد على خميس والدكتور مبروك عمر السنوسي وللأستاذ: حامد عبد الحق لتوجهاتهم وإرشاداتهم وجهودهم المبذولة في إتمام هذه الدراسة.

قائمة المراجع

[1]-شكرالله ، إميل ، صبحي. 2003م. التحليل العددي التطبيقي. الطبعة الثانية. مؤسسة بيتر للطباعة والتوريدات. وكالة الأهرام للتوزيع – القاهرة.

[2]-فضيلة، سعد، محمد. الرويعي، النفاتي، معمر. 2005م. التحليل العددي للمهندسين. الطبعة الأولى. مكتب البحوث والاستشارات الهندسية كلية الهندسة -جامعة طرابلس.

[3]- جاكس، إيان و جد ، كولن. ترجمة: إبراهيم، علي، محمد والنجار، محمد، ماهر. 1992م.التحليل العددي. الطبعة الأولى. منشورات جامعة طرابلس.

[4]- Borowski, E.J., J.M. Borwein, and A.M.B.A.-A. 1995 (Translator), Dictionary of mathematics English - French - Arabic NA ed. Lebanon: Beirut: Academia. 726 p.

[5]- Burden, R.L. and J.D. Faires,2011. Numerical analysis. Brooks/Cole, USA.

[6]- Gerald, C. F. and Wheatley, P.O.(2004). Applied Numerical Analysis.7th Edition. Pearson Education India.

[7]- Hoffman, J. D.2001.Numerical Methods for Engineers and Scientists. 2nd Edition.

[8]- Lau, M. A., & Kuruganty, S. P. (2010). Spreadsheet Implementations for Solving Boundary-Value Problems in Electromagnetics. Spreadsheets in Education (eJSiE), 4(1), 1.

[9]- LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics .

[10]- Patil, P. V., & Prasad, J. S. V. R. K. (2013). Numerical solution for two dimensional Laplace Equation with Dirichlet boundary conditions. IOSR Journal of Mathematics, 6, 66-75.

[11]- Pinchover, Y. and J. Rubinstein. 2005. An introduction to partial differential equations. Cambridge university press.

[12]- Strauss, W.A. 2007, Partial Differential Equations: An Introduction, 2nd Edition. Wiley Global Education.