مجلة العلوم البحتة والتطبيقية
Journal of Pure & Applied Sciences
www.Suj.sebhau.edu.ly ISSN 2521-9200
Received 05/06/2019 Revised 19/08/2019 Published online 11/12/2019

طريقة التدرج (الميل الأعظم) لحل مسألة الأمثلية بدون قيود

الطيب مكين محمد بابو و *امحمد المهدي عبدالله
قسم الرياضيات-كلية التربية براك-جامعة سبها، ليبيا
*للمراسلة: Amh.ali@sebhau.edu.ly

الملخص تعتبر طريقة التدرج (الميل الأعظم) أساسا للعديد من طرق الأمثلية غير الخطية، فضلا أنها تعتبر أيضا خياراً من بين الطرق المستخدمة لحل مسألة الأمثلية من الحجم الكبير، إذ أنها تحتاج حجم تخزين صغير مقارنة مع نظيراتها. في هذه الورقة قمنا بعرض مفصل لطريقة التدرج مع البحث الخطي لـــ Armijo، ثم الإشارة إلى أسلوب لتحسين أدائها، وتمثل ذلك في طريقة Barzilai-Borwein التي تزودنا بطول الخطوة باتجاه الميل الأعظم دون الحاجة إلى بحث خطي، وعلى الرغم من فعالية هذه الطريقة، إلا أنها ليست دائما متقاربة. لحل تلك المشكلة، قمنا بعرض خوارزمية منسوبة للباحث Marcos Raydan، تعمل على ربط طريقة Barzilai-Borwein مع البحث الخطي غير الرتيب لـــ Grippo-Lampariello-Lucidi. في الأخير أجرينا اختبارات عددية للطرق السابقة عن طريق برنامج حاسوبي بـــ Matlab.

الكلمات المفتاحية: قاعدة آرمجو، طريقة بارزلاي-بوروين، طرق التدرج المرافق، البحث الخطي غير الرتيب، الأمثلية غير الخطية.

Steepest descent method for unconstrained optimization

Teyib M. M. Babou , *Amhammed A. A. Ali
Department of Mathematics, Faculty of Education Brack, Sebha University, Libya.
*Corresponding author: Amh.ali@sebhau.edu.ly

Abstract The gradient method is the basis for many nonlinear optimization methods, and is also one of the methods used to solve the large scale unconstrained optimization. It requires a small storage volume compared to its counterparts. In this paper we have given a detailed presentation of the gradient method with Armijo's rule, and then a methods to improve its performance. This is represented in the Barzilai-Borwein method, which provides us with the step length the long of the steepest descent direction without the need for linesearch, but, the Barzilai-Borwein method is not always convergent. To solve this problem, we presented an algorithm attributed to the researcher Marcos Raydan, which linked the Barzilai-Borwein method with the nonmonotone linesearch of Grippo-Lampariello-Lucidi. In the end, we conducted numerical tests of the previous methods through a Matlab computer program.

Keywords: Armijo's rule, Barzilai-Borwein method, Conjugate gradient methods, Nonmonotone linesearch, Unconstrianed optimization.

المقدمة

لتكن $f : R^n \to R$. في هذه الورقة، نتعرض بشيء من التفصيل لطريقة الميل الأعظم لحل مسألة الأمثلية غير المقيدة التالية:

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

تعود هذه الطريقة بشكلها الكلاسيكي إلى Cauchy في منتصف القرن التاسع عشر. إن هذه الطريقة تعتبر الأساس للعديد من الطرق العددية لحل المسألة السابقة (طرق التدرج المرافق، طرق شبه نيوتن،...)[1].

تم تقسيم هذه الورقة إلى أربعة محاور. في المحور الأول، عرضنا خوارزمية لبحث خطي تقريبي هو قاعدة Armijo، وذلك لحساب طول الخطوة في اتجاه تناقص للدالة الهدفية. في المحور الثاني، تم التطرق لأساس بناء طريقة الميل الأعظم وتقاربها الإجمالي باستخدام قاعدة Armijo. أما في المحور الثالث، فتم عرض تحسينات -على مرحلتين- لأداء البحث في اتجاه الميل الأعظم، وكان ذلك في إطار طريقة Barzilai-Borwein [2] [3]. في المرحلة الأولى تم فقط بناء قاعدة لحساب طول الخطوة خالية من أي بحث خطي، لكن هذه الطريقة بالرغم من تفوقها على الشكل الكلاسيكي لطريقة الميل الأعظم، قد تتباعد خاصة إذا كانت الدالة الهدفية غير محدبة (في هذه الطريقة، قيمة الدالة الهدفية لا تتناقص -بشكل عام - عند كل خطوة). في المرحلة الثانية من التحسينات، تم ربط طريقة Barzilai-Borwein مع البحث الخطي غير الرتيب لـــ Grippo-Lampariello-Lucidi (لمزيد من التفاصيل عن هذا البحث الخطي انظر[4]) ، وذلك للحصول على خوارزمية متقاربة. تنسب هذه الخوارزمية لـــ Marcos Raydan، وكانت منافسة لطرق التدرج المرافق [3]، المعروفة بحسن أدائها وعدم تعقيد الحسابات بها. أخيرا، في المحور الرابع أجرينا اختبارات عددية تعطي فكرة عن أداء طريقة الميل الأعظم

وتحسيناتها، وختمنا الورقة بملحق لبرامج حاسوبية بلغة ماتلاب كتبناها لذلك الغرض.

المواد وطرق العمل

1. قاعدة Armijo

تعتبر قاعدة Armijo أحد أساليب البحث الخطي التقريبي في اتجاه تناقص للدالة الهدفية، يستخدم في هذه القاعدة بارومتران ε, α حيث يؤخذ $0 < \varepsilon < 1$، ليعمل على جعل طول الخطوة في اتجاه البحث غير كبير جدا، في حين يؤخذ $\alpha > 1$، لتفادي أن يكون طول الخطوة صغير جدا (تعتبر $\varepsilon = 0.1, \alpha = 2$ قيما نموذجية[1]).

لنعتبر أننا نسعى لإيجاد القيمة الدنيا لدالة قابلة للتفاضل $f : R^n \to R$، بدءا من النقطة $\bar{x} \in R^n$ في اتجاه تناقص d. بفرض $\theta(\lambda) = f(\bar{x} + \lambda d)$ لأجل $\lambda \ge 0$، نجد أن التقريب من الرتبة الأولى للدالة θ في جوار $\lambda = 0$ يعطى بـ $\theta(0) + \lambda\theta'(0)$. الآن نعرف الدالة $\hat{\theta}$ بالصيغة التالية:

$$\hat{\theta}(\lambda) = \theta(0) + \lambda\varepsilon\theta'(0), \quad \lambda \ge 0$$

يعتبر طول الخطوة $\bar{\lambda}$ مقبولا إذا حقق الشرط $\theta(\bar{\lambda}) \le \hat{\theta}(\bar{\lambda})$، ولتفادي أن يكون صغيرا جدا، تستلزم قاعدة Armijo الشرط $\theta(\alpha\bar{\lambda}) > \hat{\theta}(\alpha\bar{\lambda})$ [1].

يمكن تلخيص قاعدة Armijo في الخوارزمية التالية.

خوارزمية قاعدة Armijo [1]

خطوة 1: أعط قيمة ابتدائية σ لطول الخطوة $\bar{\lambda}$.

خطوة 2: إذا كانت $\theta(\sigma) \le \hat{\theta}(\sigma)$، ضع $\bar{\lambda} = \sigma$. اذهب إلى الخطوة 4.

خطوة 3: ابحث عن أصغر عدد صحيح $t \ge 1$، يحقق $\theta(\sigma/2^t) \le \hat{\theta}(\sigma/2^t)$، وضع $\bar{\lambda} = \sigma/2^t$.

خطوة 4: النهاية.

<u>**ملاحظة:**</u> في الخوارزمية السابقة تم اعتبار $\alpha = 2$. نشير أيضا أنه يمكن صياغة الخطوة 2 في الخوارزمية بالشكل التالي، وسنعتمده ذلك التعديل في التطبيقات العددية التي سنجريها لاحقا.

خطوة 2*: *إذا كان $\theta(\sigma) \le \hat{\theta}(\sigma)$ ابحث عن أكبر عدد صحيح $t \ge 0$ يحقق $\theta(2^t\sigma) \le \hat{\theta}(2^t\sigma)$ و ضع $\bar{\lambda} = 2^t\sigma$، واذهب إلى الخطوة 4.*

2. طريقة الميل الأعظم

تعريف: يعرف اتجاه البحث لطريقة الميل الأعظم بدءا من نقطة x بأنه الاتجاه d الذي يجعل $f'(x;d)$ أقل ما يمكن لأجل $\|d\| \le 1$.

مبرهنة: لتكن $f : R^n \to R$ قابلة للتفاضل عند x ولنفرض أن $\nabla f(x) \ne 0$. عندئذ، يكون الحل الأمثل للمسألة:

$$Min\ f'(x;d), \quad \|d\| \le 1$$

هو $\bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ [1].

البرهان: من قابلية التفاضل للدالة f عند x، ينتج

$$f'(x,d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^t d$$

وبالتالي تؤول المسألة إلى إيجاد القيمة الدنيا لـ $\nabla f(x)^t d$ لأجل $\|d\| \le 1$، باستخدام متباينة Chwartz، نجد

$$\nabla f(x)^t d \ge -\|\nabla f(x)\| \|d\| \ge -\|\nabla f(x)\|$$

وينتج بلوغ الحد السفلي إذا وفقط إذا $d = \bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$، ومنه $\bar{d}$ هو الحل الأمثل المطلوب.

إن $\bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ هو اتجاه بحث طريقة الميل الأعظم وعادة نأخذه $-\nabla f(x)$، وهذا ما يبرر تسمية طريقة الميل الأعظم بطريقة التدرج. يمكن تلخيص خطوات طريقة الميل الأعظم في الخوارزمية التالية.

خوارزمية الميل الأعظم [1]

خطوة 1: أعط نقطة ابتدائية x_0 وضع $k = 0$.

خطوة 2: إذا كان $\|\nabla f(x_k)\| = 0$ توقف.

خطوة 3: ضع $d_k = -\nabla f(x_k)$ وحدد $\lambda_k = \min f(x_k + \lambda d_k)$ لأجل $\lambda \ge 0$.

خطوة 4: ضع $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$، ثم استبدل k بـ $k+1$ وعد إلى الخطوة 2.

نشير إلى أنه من المعروف من الناحية العملية أنه في الخطوة 2، نتوقف عندما $\|\nabla f(x)\| < eps$ وذلك لأجل $eps > 0$ صغير بما فيه الكفاية، كما أن إجراء بحث خطي مضبوط لحل المسألة الجزئية في الخطوة 3، مكلف جدا وغير بالغ الأهمية عندما نكون بعيدين عن الحل، وبالتالي يستبدل ببحث خطي تقريبي يضمن تناقصا في قيمة الدالة الهدفية في كل خطوة أو كل عدد محدد من الخطوات، كما سنرى لاحقا.

تقارب طريقة الميل الأعظم باستخدام قاعدة Armijo

نظرية: لتكن $f : R^n \to R$ حيث $\nabla f(x)$ مستمرة ومحققة لشرط Lipschitz بثابت $G > 0$ على المجموعة $S(x_0) = \{x : f(x) \le f(x_0)\}$ لأجل نقطة معطاة $x_0 \in R^n$. نعتبر x_0 نقطة ابتدائية و $\theta(\lambda) = f(x_k - \lambda\nabla f(x_k))$ و $\hat{\theta}(\lambda) = \theta(0) + \lambda\varepsilon\theta'(0)$ وذلك لأجل $k = 0,1,2...$. عندئذ، باستخدام قاعدة Armijo لإيجاد طول الخطوة λ_k في خوارزمية

الميل الأعظم ، تنتج متتالية تقريبات: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ، ويتحقق ما يلي:

إما أن نتوقف بعد عدد منته K من الخطوات بحيث يكون $\nabla f(x_K)=0$ ، أو تنتج متتالية غير منتهية $\{x_k\}$ يكون من أجلها: $\nabla f(x_k)=0 \to 0$ [1].

البرهان: بالنسبة للحالة التي نتوقف فيها بعد عدد منته من الخطوات فهي واضحة ولا تحتاج إلى برهان، بالتالي نعتبر أنه تم توليد متتالية غير منتهــية (x_k). إن معيار قاعدة Armijo $\theta(\sigma/2^t) \le \hat{\theta}(\sigma/2^t)$ ، يكافئ

$$\theta(\sigma/2^t) \equiv f(x_{k+1}) \le \hat{\theta}(\sigma/2^t) \equiv$$

$$\theta(0) + \frac{1}{2^t}\sigma\varepsilon\nabla f(x_k)^t d_k =$$

$$f(x_k) - \frac{1}{2^t}\sigma\varepsilon\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2$$

بالتالي، يكون $t \ge 0$ هو أكبر عدد صحيح من أجله يتحقق

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\frac{1}{2^t}\sigma\varepsilon\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2 \qquad (2.1)$$

وباستخدام نظرية القيمة الوسطى، نجد أنه توجد نقطة $\bar{x}$ موجودة تماما بين x_k و x_{k+1} بحيث

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &= \lambda_k d_k^t \nabla f(\bar{x}) \\ &= -\lambda_k \nabla f(x_k)^t\left(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_k) + \nabla f(\bar{x})\right) \\ &= -\lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2 - \lambda_k \nabla f(x_k)^t\left(\nabla f(x_k) - \nabla f(\bar{x})\right) \\ &\le -\lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2 + \lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|\left\|\nabla f(x_k) - \nabla f(\bar{x})\right\| \end{aligned}$$

وبالتالي

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le$$
$$-\lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2 + \lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|\left\|\nabla f(x_k) - \nabla f(\bar{x})\right\| \qquad (2.2)$$

وبما أن الخوارزمية تضمن التناقص في قيمة الدالة الهدفية فإن $x_k \in S(x_0)$ وحيث أن $\nabla f(x)$ مستمرة على تلك المجموعة، نجد

$$\left\|\nabla f(x_k) - \nabla f(\bar{x})\right\| \le$$
$$G\left\|x_k - \bar{x}\right\| \le G\left\|x_k - x_{k+1}\right\| = G\lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\| \qquad (2.3)$$

وبتعويض (2.3) في (2.2) ، نجد

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\le -\lambda_k\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2\left(1 - \lambda_k G\right) \\ &= -\frac{1}{2^t}\sigma\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2\left(1 - \frac{1}{2^t}\sigma G\right) \qquad (2.4) \end{aligned}$$

إن العلاقة(2.4) عطينا تقديرا لحد تزايد العدد الصحيح الموجب t الكافي لجعل العلاقة (2.1) صحيحة. في الواقع، إن t هو أول عدد صحيح موجب يجعل $\left(1-\sigma G/2^t\right) \ge \varepsilon$، أي أن $\left(1-\sigma G/2^{t-1}\right) < \varepsilon$ ، وبالتالي

$$\sigma\varepsilon/2^t > \varepsilon(1-\varepsilon)/2G$$

بالعودة إلى العلاقة (2.1) ، والاستفادة من المتباينة الأخيرة نجد

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2G}\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2$$

وبما أن المتتالية $\{f(x_k)\}$ متناقصة ومحدودة فإنها تملك نهاية. بأخذ نهاية الطرفين عندما $k \to +\infty$ ، نجد

$$0 \le -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2G}\lim_{k\to+\infty}\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2$$

ومنه $\nabla f(x_k) \to 0$ ، وهو المطلوب إثباته.

نشير إلى أن سرعة تقارب طريقة الميل الأعظم خطية، فهي طريقة تعمل بشكل جيد في خطواتها الأولى تبعا لنقطة البدء x_0 ، بينما يكون أداؤها ضعيفا كلما اقتربت من إحدى النقاط الحرجة للدالة الهدفية ليصبح طول الخطوة صغيرا، ولكون اتجاهات البحث متعامدة، يكون الانتقال بين التقريبات الأخيرة على شكل "خط منكسر مرتد" (Zigzagging phenomenon) [6] [1].

3. تحسين أداء البحث في اتجاه الميل الأعظم

تحدث ظاهرة "الخط المنكسر المرتد" بشكل واضح عندما تكون مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية معتلة الشرطية (Ill-conditionned) أي أن القيمة المطلقة لنسبة أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة إلى القيمة الذاتية الأصغر كبيرة مقارنة مع الواحد الصحيح[2] [1].

لتحسين أداء طريقة الميل الأعظم وتخفيف حساسيتها للظاهرة السابقة، قام الباحثان Barzilai و Borwein في سنة 1988 بتقديم طريقة كان فيها اتجاه البحث عند الخطوة k هو أيضا $d_k = -\nabla f(x_k)$ ، و $x_{k+1} = x_k - S_k d_k$ ، حيث $S_k = \lambda_k I$، أما طول الخطوة λ_k يتم الحصول من خلال إيجاد القيمة الدنيا لـــ $\left\|\Delta x - \lambda\Delta g\right\|^2$ أو بالتناظر إيجاد القيمة الدنيا لـــ $\left\|\lambda\Delta x - \Delta g\right\|^2$ حيث:

$$\Delta x = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta g = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$$

وذلك في إطار تقريب لحل معادلة القاطع (معادلة Newton) المندرج تحت الطرق شبه نيوتن (Quasi-Newton methods). بالتالي نجد أن $x_{k+1} = x_k - \lambda_k d_k$ ، وعليه يمكن إعطاء λ_k بصيغتين مختلفتين، تعطى إحداهما كما يلي[2]:

$$\lambda_k = \frac{(x_k - x_{k-1})^t (x_k - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^t (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))} \qquad (3.1)$$

بالفعل، هذا الاختيار لحساب طول الخطوة جعل خوارزمية الحل أقل كلفة وأبدى تفوقا ملحوظا على طريقة الميل الأعظم المعروض سابقا[2].إن تناقص قيمة الدالة لا يحصل – بشكل عام– في كل خطوة وهذا بالرغم من تقارب الخوارزمية بالنسبة للدوال المحدبة [5] [3]، أما بالنسبة للدوال غير المحدبة من المناسب دمج هذه الطريقة مع بحث خطي مناسب يضمن تناقصا دوريا على الأقل في قيمة الدالة الهدفية.

في سنة 1997، اقترح الباحث Marcos Raydan خوارزمية معتمدة على البحث الخطي غير الرتيب لـــ Grippo-Lampariello-Lucidi [4]، تسمح بأخذ طول الخطوة كما في العلاقة (3.1) كلما أمكن ذلك وكان ذلك مفيدا في إطار الاستفادة من الخواص الجذابة لطريقة Barzilai-Borwein. إن اختيار بحث خطي رتيب يرجع الطريقة إلى طريقة الميل الأعظم بشكلها الكلاسيكي المعروفة بالبطء عند الاقتراب من الحل. نعرض فيما يلي، الخوارزمية المقترحة في [3]، مع تصرف في الترميز ليتلاءم مع الترميز الذي اعتمدناه في الأجزاء الأخرى من الورقة.

خوارزمية Marcos Raydan مع البحث الخطي في اتجاه الميل الأعظم [3]

خطوة 1: أعط x_0, α_0 وعددا صحيحا $M \ge 0$ و $\gamma, \varepsilon \in]0,1[, \delta > 0, 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ وضع $k = 0$.

خـــطوة 2: إذا كان $\|\nabla f(x_k)\| = 0$ توقف.

خـــطوة 3: إذا كان $\alpha_k \le \varepsilon$ أو $\alpha_k \ge 1/\varepsilon$ ضع $\alpha_k = \delta$.

خـــطوة 4: ضع $\lambda = 1/\alpha_k$.

خـــطوة 5: إذا كان

$$f(x_k - \lambda \nabla f(x_k)) \le \max_{0 \le j \le \min(k,M)} f(x_{k-j}) - \gamma\lambda \|\nabla f(x_k)\|^2$$

ضع $\lambda_k = \lambda,\ x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$. اذهب إلى الخطوة 7.

خـــطوة 6: اختر $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ واستبدل λ بـــ $\sigma\lambda$. عد إلى الخطوة 5.

خـــطوة 7: ضع

$$\alpha_{k+1} = -\frac{\nabla f(x_k)^t \left(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})\right)}{\lambda_k \|\nabla f(x_k)\|^2}$$

واستبدل k بـــ $k+1$ وعد إلى الخطوة2.

إن أهمية الخطوة (3) تكمن في تفادي بحث خطي عسير أو مكلف [3]، بالإضافة إلى ضمان محدودية المتتالية $\{\lambda_k\}$. نشير إلى أنه من المناسب أن نختار ε صغير جدا لإتاحة الفرصة لأخذ طول الخطوة كما في العلاقة (3.1) الذي ينتج من عدم تحقق الشرط الوارد في الخطوة (3).

نشير أيضا إلى أن $\nabla f(x_k) \to 0$، وذلك بشرط أن تكون المجموعة $S(x_0) = \{x : f(x) \le f(x_0)\}$ محدودة و ∇f مستمرة في جوار ما N لـــ $S(x_0)$، وهذه شروط خفيفة مقارنة مع الشروط المفروضة لتقارب طريقة التدرج المرافق لـــ Fletcher-Reeves والتي تضمن فقط $\inf \|\nabla f(x_k)\| \to 0$ [7]. نضيف أيضا، أن أي نقطة نهاية للمتتالية المولدة في الخوارزمية السابقة لن تكون نقطة، تملك فيها الدالة الهدفية قيمة عظمى محلية[3].

4. اختبارات عددية

لقد أجرينا اختبارات عددية للطرق السابقة في إيجاد القيمة الدنيا لكل من الدالتين التاليتين:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

أما بالنسبة لقيم الوسطاء، فقد اخترنا في قاعدة Armijo، $\varepsilon = 0.2$ و $\alpha = 2$، واعتبرنا أن معيار توقف كل خوارزمية هو $\|\nabla f(x_k)\| < eps = 10^{-8}$ أو $k = k_{\max} = 500$. بالنسبة لخوارزمية Marcos Raydan فقد تم اختيار الوسطاء المتبقية كما يلي:

$$\varepsilon = 10^{-10}, \sigma = 0.5, \alpha = 1, \gamma = 10^{-4}, m = 10,$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & 1 < \|\nabla f(x_k)\| \\ \|\nabla f(x_k)\|^{-1}, & 10^{-5} \le \|\nabla f(x_k)\| \le 1 \\ 10^5, & \|\nabla f(x_k)\| < 10^{-5} \end{cases}$$

♦ الدالة f_1

جدول 1 : النتائج المتحصل عليها لاجل الدالة f_1

الطريقة	نقاط البــدء	عــدد الخطوات
طريقة التدرج مع قاعدة Armijo	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	123 123
طريقة Barzilai-Borwein	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	20
خوارزمية Marcos Raydan	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	42 38

لاختبار حساسية طريقة الميل الأعظم مع البحث الخطي لـــ Armijo، للاعتلال الشرطي وخفة تلك الحساسية بالنسبة لطريقة Barzilai-Borwein وكذلك بالنسبة لخوارزمية Marcos Raydan، نستبدل مثلا، في صيغة الدالة f_1 ، 20 بـــ 40، فنجد النتائج المدرجة في الجدول التالي:

جدول 2 : النتائج المتحصل عليها لاجل الدالة f_1 بعد التعديل

الطريقة	نقاط البدء	عدد الخطوات
طريقة التدرج مع قاعدة Armijo	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	265 274
طريقة Barzilai-Borwein	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	23
خوارزمية Marcos Raydan	(0,0,0,0) (3,0,0,0)	56 29

بالفعل، بمقارنة الجدولين (1) و (2)، نجد أن عدد الخطوات بالنسبة لطريقة الميل الأعظم مع البحث الخطي لـــ Armijo تجاوز الضعفين بينما تغير بشكل طفيف بالنسبة لطريقة Barzilai-Borwein. أما بالنسبة لخوارزمية Marcos Raydan فنلاحظ أنه إجمالا، لم يحصل تغير كبير وذلك بالنظر إلى مجموع عدد الخطوات بالنسبة للنقطتين اللتين تم اختيارهما، ثم إن التغير متوقع بسبب استخدام بحث خطي يضمن دوريا تناقص قيمة الدالة بعد عدد محدد من الخطوات وذلك لضمان التقارب.

♦ الدالة f_2

جدول 3 : النتائج المتحصل عليها لأجل الدالة f_2

الطريقة	نقاط البدء	عدد الخطوات
طريقة التدرج مع قاعدة Armijo	(2,2) (0,3)	>500 >500
طريقة Barzilai-Borwein	(2,2) (0,3)	54
خوارزمية Marcos Raydan	(2,2) (0,3)	58 57

إن الاختبارات العددية السابقة لا تعدو كونها أمثلة عددية على أداء كل من الطرق الواردة في الورقة وقد تقاربت كل الطرق من الحل الأمثل للمسألة المطروحة.

في الأخير، نود أن نشير إلى أن الدراسات باللغة العربية في مجال الأمثلية غير الخطية تكاد تكون معدومة، ونأمل أن تفتح هذه الورقة نافذة أمام باحثينا المختصين للكتابة في هذا المجال الحيوي الذي تتطلبه تطبيقات علمية عديدة.

المراجع

[1]- **Moktar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali and C. M. Shetty.** Nonlinear Programming, (1993).

[2]- **J. Barzilai and J.M Borwein.**Two point step size gradient methods. IMA J. Numer. Anal., 8(1988), pp. 141-148.

[3]- **M. Raydan,** The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem, SIAM J. Optim., 7(1997), pp. 26-33.

[4]- **L.Grippo, F. Lampariello, and S. Lucidi.** A nonmonotone line search technique for Newton's Method. SIAM J. Numer. Anal., 23 (1986), pp. 707-716.

[5]- **A. Freidlander, J. M. Martinez AND M. Raydan.** A new method for large scale box constrained convex quadratic minimization problems. Optim. Methods and Software, 5 (1995), pp. 57-74.

[6]- **David G. Luenberger.** Introduction to Linear and Nonlinear Programming, (1972).

[7]- **محمد بابو. الطيب.** طريقة التدرج المرافق لـــ Fletcher-Reeves لحل مسألة البرمجة اللاخطية بدون قيود، مجلة الساتل، العدد (1)، ص 201–218.

ملحق البرامج والدوال

1- برنامج طريقة الميل الأعظم مع قاعدة Armijo

```
clc
clear
epselon=input('Enter the desired precsion: ');
x=input('Enter initial guess: ');
k=0;kmax=500;d=-grd(x);
while(norm(d)>=epselon&&k<=kmax)
    st=armijo(x,d);x=x+st*d; d=-grd(x);k=k+1;
end
v=fun(x);
disp(['The approximate solution: ',num2str(x)])
disp(['The value of f=',num2str(v)])
disp(['Number of iterations: ',num2str(k)])
```

2- برنامج طريقة Barzilai-Borwein

```
clc
clear
epselon=input('Enter the desired precsion: ');
x=input('Enter initial guess1: ');
z=input('Enter initial guess2: ');
k=0;d=-grd(x);kmax=500;
while(norm(d)>=epselon&&k<=kmax)
    st=(norm(x-z))^2./((x-z)*(grd(x)-grd(z))');
    z=x; x=x+st*d;d=-grd(x);k=k+1;
end
```

```
a=[20 0 0 0;0 10 0 0;0 0 2 0;0 0 0 1];
b=[1 1 1 1];
func=0.5*dot(y,a*y')-dot(b,y);
end
function grdt = grd(y)
a=[20 0 0 0;0 10 0 0;0 0 2 0;0 0 0 1];
b=[1 1 1 1];
grdt=(a*y'-b')';
end
```

6- الدالة الحاسوبية للدالة f_2 وتدرجها

```
function func = fun(y)
func=(y(1)-2)^4+(y(1)-2*y(2))^2;
end
function grdt = grd(y)
grdt(1)=4*(y(1)-2)^3+2*(y(1)-2*y(2));
grdt(2)=-4*(y(1)-2*y(2));
end
```

```
v=fun(x);
disp(['The approximate solution: ',num2str(x)])
disp(['The value of f=',num2str(v)])
disp(['Number of iterations: ',num2str(k)])
```

3- برنامج خوارزمية Marcos Raydan

```
clc
clear
epselon=input('Enter the desired precsion: ');
x=input('Enter initial guess: ');
fva(1)=fun(x);fmax=fva(1);
kmax=500;alpha=1;epsl=1.0e-10;gama=1.0e-4;
sigma=0.5;k=0;m=10;d=grd(x);nd=norm(d);
while(nd>=epselon&&k<=kmax)
    if (nd>1)
        delta=1;
    elseif(nd>=1.0e-5&&nd<=1)
        delta=1/nd;
    else
        delta=1.0e5;
    end
    if(alpha<=epsl||alpha>1/epsl)
        alpha=delta;
    end
    lemda=1/alpha;
    while(fun(x-lemda*d)>fmax-gama*lemda*nd^2)
        lemda=sigma*lemda;
    end
    y=x;x=x-lemda*d;k=k+1;
    if(k<=m)
        fva(k+1)=fun(x);
    else
        for i=1:m
            fva(i)=fva(i+1);
        end
        fva(m+1)=fun(x);
    end
    fmax=max(fva);
    alpha=-(dot(d,grd(x)-d))/(lemda*nd^2);
    d=grd(x);nd=norm(d);
end
v=fun(x);
disp(['The approximate solution: ',num2str(x)])
disp(['The value of f=',num2str(v)])
disp(['Number of iterations: ',num2str(k)])
```

4- الدالة الحاسوبية لقاعدة Armijo

```
function pas=armijo(y,p)
s=1;t=1;ep=0.2;fy=fun(y);gy= grd(y);
if fun(y+s*p)<fy+s*ep*gy*p'
    while fun(y+2^t*s*p)<=fy+2^t*s*ep*gy*p'
        t=t+1;
    end
    s=2^(t-1)*s;
else
    while fun(y+(1/2^t)*s*p)>fy+(1/2^t)*s*ep*gy*p'
        t=t+1;
    end
s=(1/2^t)*s;
end
pas=s;
end
```

5- الدالة الحاسوبية للدالة f_1 وتدرجها

```
function func = fun(y)
```